

**Тернопільський національний педагогічний університет
імені Володимира Гнатюка**

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу
Кафедра інформатики та методики її викладання

Дипломна робота

з математичного аналізу

на тему: **«Використання комп'ютерних технологій під час вивчення
математичного аналізу»**

Студента 5 курсу, групи М-52
спеціальності 7.04020101. Математика
Слободяна Дмитра Ярославовича

Керівник: доцент,
кандидат фізико-математичних наук
Громяк М. І.

Консультант: доцент,
кандидат педагогічних наук
Балик Н. Р.

Рецензент: доцент
кандидат фізико-математичних наук,
Мартинюк О. М.

Національна шкала _____
Кількість балів: _____ Оцінка: ECTS _____

Тернопіль - 2013 року

Зміст

ВСТУП	4
РОЗДІЛ 1 ТЕОРЕТИЧНІ АСПЕКТИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ТА СИСТЕМИ WOLFRAM MATHEMATICA	6
1.1. Деякі відомості математичного аналізу.....	6
1.2. Короткий огляд та аналіз сучасних систем комп'ютерної математики .	7
1.3. Загальні відомості про систему Wolfram Mathematica.....	11
1.4 . Особливості системи Wolfram Mathematica	14
1.5. Інтерфейс системи Wolfram Mathematica	15
РОЗДІЛ 2 ВИКОРИСТАННЯ ПРОДУКТІВ КОМПАНІЇ WOLFRAM ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ	17
2.1. Використання системи Wolfram Mathematica під час вивчення математичного аналізу.....	17
2.1.1. Обчислення границь функції	17
2.1.2. Обчислення похідних	21
2.1.3. Обчислення інтегралів.....	21
2.1.4. Побудова графіків на площині	24
2.1.5. Побудова графіків поверхонь	27
2.2. ВИКОРИСТАННЯ СЕРВІСУ «WOLFRAM ALPHA PRO»	31
2.2.1. Обчислення границь в «Wolfram Alpha Pro»	31
2.2.2. Дослідження рядів в «Wolfram Alpha Pro».....	42
2.2.3. Інтеграл в «Wolfram Alpha Pro».....	45
2.2.4. Обчислення площі плоскої фігури в Wolfram Alpha.....	48
2.2.5 Використання сервісу «Wolfram Alpha Pro» в телефонах і смартфонах.....	52
РОЗДІЛ 3 ВИКОРИСТАННЯ СЕРВІСУ «WOLFRAM ALPHA PRO»	55

3.1. Порівняння обчислення Студентом, програмою Wolfram Mathematica 9.0 і сервісом «Wolfram Alpha Pro»	55
3.1.1. Ряди.....	55
3.1.2. Інтеграли	59
3.1.3. Границі	65
3.2. Методика використання комп'ютерних технологій під час вивчення математичного аналізу.....	72
ВИСНОВКИ	74
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	76
ДОДАТКИ.....	78

ВСТУП

На сьогоднішній день в широких колах користувачів обчислювальних машин став досить популярним і широко використовуваним термін «комп'ютерна математика». Дане поняття включає сукупність як теоретичних і методичних засобів, так і сучасних програмних і апаратних засобів [10].

Попит на універсальні і спеціалізовані програмні пакети для вирішення різних прикладних завдань викликав появу на ринку програмних продуктів систем комп'ютерної математики (СКМ), які швидко стали популярними.

В останні роки в процес математичної освіти дедалі наполегливіше і успішніше впроваджуються такі системи, як DERIVE, MatLab, Maple, MuPAD, Mathematica та ін. Вони звільняють користувача від проведення громіздких, рутинних викладок, однотипних обчислень і дозволяє зосередитися безпосередньо на аналізі модельованого явища. Діалог з пакетом СКМ відбувається на досить природній мові, використовуються традиційні позначення і способи написання формул. Безсумнівною достоїнством сучасних СКМ є прекрасні графічні можливості, що дозволяє зробити наочними багато математичних понять і методів.

У викладацькому середовищі математиків існує обґрунтоване побоювання, що використання систем комп'ютерної математики "зіпсує" математичну підготовку студентів, подібно до того, як "калькулятор розучив їх рахувати". Вихід бачиться у роз'ясненні призначення та використання СКМ. Очевидно, що успішне використання СКМ можливо лише за умови знання основ математики. Більше того, щоб використати всі можливості таких пакетів як MatLab, Maple, Mathematica потрібна дуже висока математична культура [7, с. 3].

А також, при залученні СКМ для обчислень потрібно пам'ятати, що використовувати обчислювальну систему не завжди просто. Для одних і тих

же завдань система може пропонувати кілька варіантів виконання, і студент, який застосовує систему, повинен вміти вибрати найбільш ефективний варіант. Далі, будь-яка система комп'ютерної математики не застрахована від локальних помилок, і користувач повинен пам'ятати про способи контролю проведених обчислень. Тобто потрібно, в певному сенсі, вміти відслідковувати процес виконання перетворень. Також потрібно мати уявлення про способи подання даних в СКМ.

В даній дипломній роботі **об'єктом дослідження** є процес вивчення математичного аналізу.

Предметом дослідження – використання СКМ Wolfram Mathematica під час вивчення математичного аналізу.

Мета даної роботи – продемонструвати можливості системи Wolfram Mathematica при вивченні математичного аналізу.

Актуальність роботи полягає в тому, що за допомогою системи WM, студент може самостійно перевіряти себе, тобто, контролювати рівень формування навичок і умінь, представляти результати у найбільш наочній формі, будувати без труднощів складні тривимірні поверхні і т.д. При цьому звільняти час для обдумування алгоритмів, більш глибокого вивчення математичної сутності розв'язуваних задач і їх рішень різними методами.

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНІ АСПЕКТИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ТА СИСТЕМИ WOLFRAM MATHEMATICA

1.1. Деякі відомості математичного аналізу

Математичний аналіз займає центральне місце в ряду математичних і технічних дисциплін, які вивчаються. Він є базою, стартовим матеріалом для їх розуміння та засвоювання [14].

В процесі навчання математичного аналізу студенти отримують знання та навички як найпростішого, так і складного аналізу. Вони вчаться використовувати методи диференціального та інтегрального числення функцій однієї або декількох змінних. Широко ознайомлюються з дослідженнями функцій та способами їх представлення, вивчають різноманітні прийоми та оператори для логічного та грамотного запису виразів.

Методи математичного аналізу, засновані на доказах теорем, лем, наслідках та ін., привчають студентів до строгості математичного мислення, абстрактності в підходах до розв'язання задач, до бачення та прогнозування аналогових ситуацій. Оволодіння методами математичного аналізу дозволяє використовувати їх в дослідницьких та практичних цілях, домагаючись реальності результатів та необхідної точності розрахунків [6, с. 3].

Міцне засвоєння сучасних математичних методів дає змогу випускнику університету розв'язувати в своїй діяльності актуальні практичні задачі та розуміти написані на сучасному науковому рівні результати інших дослідників і тим самим удосконалювати свою проф. майстерність [6, с. 4].

Однак, курс математичного аналізу дуже широкий і складний, він охоплює великий об'єм матеріалу. Проте, виділених годин на практичні заняття не достатньо для якісного засвоєння необхідного матеріалу та для формування навичок і умінь по цій дисципліні. Тому, приблизно 1/3 відводиться на самостійну роботу студентів.

Самостійна навчальна робота не лише формує у студентів навички і вміння самостійного здобування знань, що важливо для здійснення неперервної освіти протягом усієї подальшої трудової діяльності, а й має важливе виховне значення, оскільки формує самостійність як рису характеру, що відіграє істотну роль у структурі особистості сучасного спеціаліста вищої кваліфікації.

Вагомим підґрунтям для самостійної роботи має стати лекція, на якій викладач не просто закликає до самостійної роботи, а й порушує проблеми, пропонує конкретні завдання, рекомендує певну літературу чи системи комп'ютерної математики, визначає час для виконання роботи, повідомляє види й терміни її контролю, наголошує на можливості отримати консультацію [8,с. 126].

Використання СКМ у самостійній роботі студентів при вивченні математичного аналізу дає змогу поєднати високі обчислювальні можливості з перевагами графічного подання інформації. Це сприяє розвитку геометричної інтуїції, графічних навичок, евристичної діяльності студентів і дає змогу враховувати їхні індивідуальні здібності. Також системи комп'ютерної математики можна паралельно використовувати як потужні електронні довідники з великою кількістю прикладів [8, с. 140].

1.2.Короткий огляд та аналіз сучасних систем комп'ютерної математики

Нові інформаційні технології докорінно змінили порядок вирішення математичних завдань. Тепер рішення завдань і виконання математичних перетворень доцільно проводити за допомогою спеціальних програм. Саме огляду і короткому аналізу таких програмних продуктів і присвячений даний підрозділ [4, с. 15].

За функціональністю сучасні математичні системи діляться в цілому на дві категорії: пакети, призначені в основному для чисельних розрахунків (MatLab, S-PLUS) і системи комп'ютерної алгебри (Derive, Mathematica, Maple, Macsyma, частково, MathCad) – вони також називаються системами символічних чи аналітичних обчислень (Symbolic Manipulation Program). Це найбільш універсальні математичні програми, здатні вирішувати найрізноманітніші задачі, причому як чисельно, так і точно – аналітично [11].

Опис та особливості системи Mathematica будуть розглянуті в підрозділі 1.3.

1) DERIVE

Система Derive, повна назва якої Derive a Mathematical Assistant (математичний помічник Derive), фірми Soft Warehouse, Inc., являється маловимогливим до ресурсів пакетом символічної математики, орієнтованим в першу чергу на студентів та шкільних викладачів. Однак він з успіхом використовується також для серйозних наукових досліджень [3, с. 11].

Derive є зручним інструментом при диференціюванні, інтегруванні, розкладанні функцій в ряди, знаходженні границь. Система має повний набір вбудованих елементарних функцій, а також безліч статистичних і спеціальних математичних функцій. Система дозволяє працювати з матрицями, проводити перетворення Фур'є і Лапласа. Здатність системи працювати з комплексними числами робить її привабливою для радіотехнічних і електротехнічних розрахунків. Загалом, можливості системи повністю покривають потреби класичних курсів елементарної та вищої математики [1, с. 23].

2) MAPLE

Даний продукт компанії Waterloo Maple Software, Inc. (<http://www.maplesoft.com/>), дозволяє виконувати як чисельні, так і аналітичні розрахунки з можливістю редагування тексту і формул на робочому аркуші. Завдяки представленню формул в поліграфічному форматі, чудовою двовимірної і тривимірної графіки та анімації Maple є одночасно і потужним науковим графічним редактором [14].

Проста і ефективна мова-інтерпретатор, відкрита архітектура, можливість перетворення кодів Maple в коди C робить його дуже ефективним засобом створення нових алгоритмів. Володіє інтуїтивно зрозумілим інтерфейсом, простими правилами роботи і широким функціоналом, цей продукт вже завоював популярність у російських математиків та інженерів. Найближчим конкурентом Maple є пакет Mathematica фірми Wolfram Research.

3) MATHCAD

Це інтегроване середовище для виконання, документування та обміну результатами технічних обчислень від компанії MathSoft, Inc. (<http://www.mathsoft.com/>). Система має зручний інтерфейс, добре розвинені засоби допомоги і велику довідкову базу. Mathcad служить засобом обчислень, аналізу та написання звітів для професіоналів у всіх галузях науки і техніки. Барвисті дво- і тривимірні графіки будуються миттєво і з автоматичним вибором масштабу. Продукт простий у використанні і не викликає проблем при навчанні [10].

Система Mathcad спочатку була орієнтована на чисельні розрахунки, але в даний час, у зв'язку з інтеграцією з Maple, система набула широкі можливості для символічних перетворень [7, с. 27].

Багато проблем, що виникають при роботі з Mathcad, знімаються завдяки наявності електронних підручників та можливості підключення до глобальної Мережі Інтернет, через яку користувач отримує доступ до сервера, на якому можна знайти приклад вирішення подібного завдання.

4) MACSYMA

Macysma від компанії Macysma, Inc.(<http://www.macysma.com/>) – це одна з перших математичних програм, які оперують символічною математикою. Сильна сторона Macysma – розвинутий апарат лінійної алгебри та диференціальних рівнянь. Система орієнтована на прикладні розрахунки і не призначена для теоретичних досліджень у галузі математики. У зв'язку з цим в програмі відсутні або скорочені розділи, пов'язані з теоретичними методами (теорія чисел, теорія груп, та _пе.) [14].

Macysma має дуже зручний інтерфейс. Робочим документом програми є науковий зошит, в якому містяться доступні для редагування поля тексту, команд, формул і графіків. Відмінною особливістю пакету є сумісність з текстовим редактором Microsoft Word. Майже всі команди Macysma в бібліотечних файлах завантажуються автоматично; дуже зручно і вікно перегляду (браузер) математичних функцій. Macysma генерує коди FORTRANa і C, включаючи керуючі оператори [10].

5) MATLAB

MATLAB (MATrix LABoratory – матрична лабораторія) – продукт компанії MathWorks, Inc. (<http://www.mathwork.com/>), що представляє собою мову високого рівня для науково-технічних обчислень.

В основу створення системи MATLAB покладено принцип розширюваності, що дозволяє адаптувати систему під завдання користувача. Сутність цього принципу полягає в тому, що користувач може створювати практично необмежену кількість власних функцій, які зберігаються на жорсткому диску EOM [14].

Основні області застосування MATLAB – це математичні розрахунки, розробка алгоритмів, моделювання, аналіз даних і візуалізація, наукова та інженерна графіка, розробка програм, включаючи графічний інтерфейс користувача.

Мультиплатформеність MATLAB зробила його одним з найпоширеніших продуктів – він фактично став прийнятими в усьому світі стандартом технічних обчислень [10].

Програма MATLAB в основному призначена для чисельного моделювання систем, однак починаючи з версії 5.0 містить спеціальний модуль MatLab Notebook для оформлення документів, а також придбаний модуль символної бібліотеки програми Maple V для виконання аналітичних перетворень [1, с. 30].

б) S-PLUS

S-PLUS – продукт компанії Insightful Corporation (<http://www.insightful.com/>), раніше відомої як підрозділ MathSoft, яка нині є одним зі світових лідерів у сфері статистичного аналізу даних, візуалізації та прогнозування.

S-PLUS представляє собою інтерактивне комп'ютерне середовище, яке забезпечує повнофункціональний графічний аналіз даних і включає оригінальну об'єктно-орієнтовану мову. До основних переваг S-PLUS відносяться неперевершена функціональність, можливість інтерактивного візуального аналізу даних, методи підготовки аналізованих даних, простота використання найсучасніших статистичних методів, потужні обчислювальні можливості, розширюваний набір статистичних методів і гнучкий інтерфейс користувача [10].

1.3. Загальні відомості про систему Wolfram Mathematica

Система Mathematica створена американською компанією Wolfram Research, Inc., голова і засновник якої – відомий фізик і математик Стефан Вольфрам (Stephen Wolfram) – є основним автором розробки. Ще в 70-х роках молодий дослідник (С. Вольфрам народився в 1959 році), працюючи в різних галузях фізики, звернув увагу на те, що вченим дуже часто зустрічаються схожі комплекси громіздких математичних викладок, які віднімають багато часу. Проводити такі обчислення в той час можна було або «в лоб» –

озброївшись ручкою і зошитом, або за допомогою «замовних» комп'ютерних програм вузької спеціалізації [12].

Поставивши собі за мету забезпечити вчених продуктивним математичним інструментом, Вольфрам зібрав колектив розробників для визначення архітектури нової (як тепер кажуть, повністю ексклюзивної) комп'ютерної системи. Далекоглядна концепція системи Mathematica полягало у створенні раз і назавжди такої системи символічної математики, в якій можна було б обробляти найрізноманітніші аспекти технічних обчислень і не тільки, когерентним і єдиним чином. Ключовим інтелектуальним досягненням, завдяки якому це стало можливо, стало створення нового виду символічної комп'ютерної мови, яка вперше змогла маніпулювати найширшим діапазоном об'єктів, необхідних для досягнення універсальності, обов'язкових для технічних обчислень, використовуючи при цьому лише невелику кількість примітивів [13].

У серпні 1987 року була заснована Wolfram Research, а наступного року – у червні 1988 року – офіційно вийшла перша версія системи Mathematica на платформі Macintosh. Програма одразу ж отримала дуже гарні відгуки з боку провідних (і не тільки математичних) видань світу. Ще менш ніж через півроку з'явилася версія Mathematica для комп'ютерів з MS-DOS. З тих пір були розроблені версії системи для Microsoft Windows, Windows NT, OS/2, Linux, Unix, Convex і т.д. – всього більше ніж для 20 операційних систем і апаратних засобів.

У 1991 році фірма Wolfram Research представила другу версію Mathematica, що включає в себе вдосконалену мову програмування, компілятор і можливість використання готових звукових схем. Третя версія, випущена в 1996 році, представила Mathematica як пакет з новим, простим у використанні інтерфейсом з кнопками та палітрами [13].

Спочатку, вплив системи Mathematica відчувався у фізиці, математиці та інженерних дисциплінах. Але з роками, система Mathematica стала активно використовуватися в набагато ширшому діапазоні областей знань, що

виходять за рамки технічних. Система Mathematica використовується сьогодні в різних дисциплінах – фізиці, біології, соціальних та інших науках. Вона зіграла вирішальну роль у багатьох важливих відкриттях і стала основою для тисяч технічних документів. У комерційній діяльності система Mathematica грає важливу роль у розвитку складного фінансового моделювання і в даний час широко використовується в багатьох видах загального планування та аналізу. Система Mathematica також є важливим інструментом у галузі інформатики і в розробці програмного забезпечення – її мовний компонент широко використовується як середовище для проведення досліджень, написання прототипів, і в створенні інтерфейсів.

Найбільша частина користувачів системи Mathematica складається з фахівців технічних та інших галузей знань. Однак система Mathematica також широко застосовується в освіті і зараз сотні курсів, від середньої школи до аспірантури, засновані на її використанні. До того ж, після появи студентської версії, Mathematica стала популярним і престижним інструментом для студентів у всьому світі [2, с. 102].

З тих пір, як була випущена перша версія Mathematica, кількість користувачів системи неухильно зростає і зараз їх загальна кількість налічує мільйони. Сьогодні вона використовується всіма компаніями зі списку Fortune 50, в усіх 15-ти департаментах уряду США, і в кожному з 50-ти найбільших університетах світу [4].

Протягом багатьох років спільність базового дизайну системи Mathematica неухильно дозволяла їй розширювати сфери її області впливу. Поступово, система Mathematica пройшла шлях від програми, яка використовується переважно для математичних та технічних розрахунків до інструменту, широко застосовуваного у різних інших областях обчислювальних дисциплін [13].

1.4. Особливості системи Wolfram Mathematica

З перших кроків і до остаточного результату Mathematica володіє швидким та інтуїтивно-зрозумілим управлінням. Mathematica допомагає швидко просуватися до рішення при використанні її безпосередньо як інструмент обчислень або ж як потужну систему моделювання.

Для того, хто зібрався вперше попрацювати з Mathematica, труднощі можуть розпочатися негайно. Все, що система пропонує при запуску, - це чисте робоче вікно нового блокнота. Однак досить невеликого досвіду роботи з комп'ютером, щоб поступово освоїтися і вже незабаром визнати – за широтою охоплення математичного матеріалу, за можливостями оформлення робочих документів і, особливо, по частині інтерфейсу Mathematica як мінімум не поступається всім іншим математичним системам разом взятих.

Вбудовані підказки й інтегрована допомога допомагають швидко почати роботу. Вводячи необхідні числа і символи можна використовувати традиційну систему запису [9].

Однією з особливостей програми є назва стандартних функцій повними іменами без скорочень. Це дозволяє (при певному рівні знання математичної англійської мови) дуже швидко знаходити потрібні функції [14].

Mathematica не тільки може виконувати необхідні обчислення, але й у багатьох випадках вона вибере оптимальний спосіб проведення обчислень. Все що потрібно зробити – це визначити завдання; Mathematica ховає всі складні механічні аспекти вирішення, дозволяючи концентруватися безпосередньо на завданні.

Mathematica однаково добре справляється з завданнями різної складності і масштабів, це щось більше, ніж звичайна script-мова. Можна сказати, що система Mathematica написана на мові Mathematica, хоча деякі функції, особливо пов'язані з лінійною алгеброю, з метою оптимізації були написані мовою C [5, с.15].

Система Mathematica складається з ядра (обчислювальний механізм) і зовнішньої оболонки (візуальний інтерфейс), які взаємодіють через протокол MathLink. Ці компоненти можуть з'єднуватися самими різними шляхами. Інші компоненти, які використовують MathLink, можуть мати можливість взаємодіяти з Mathematica.

Бібліотека програм Mathematica – це постійно розширювальна збірка складного програмного забезпечення, яка створена для вирішення технічних і обчислювальних завдань для різних специфічних областей. Кожний додаток програми було створено фахівцем у своїй галузі, який знає, як застосувати обчислювальні можливості Mathematica для вирішення щоденних завдань [13].

Величезним достоїнством програми Wolfram Mathematica є потужна довідкова система, яка дозволяє уточнити призначення будь-якої функції, оператора або службового слова системи і поступово знайомить з її можливостями. Однак вона включає в себе не тільки дуже якісний опис функцій з прикладами, а також підручник. У ній є всі матеріали для тих хто тільки починає роботу з програмою, і для тих хто працює з нею дуже давно. Але є один недолік – вся програма і довідкова система написані виключно англійською мовою. Тому ця довідкова система не претендує на роль навчальної системи і незручна для знайомства з системою Mathematica [9].

1.5.Інтерфейс системи Wolfram Mathematica

Інтерфейс системи Mathematica реалізує відображення вікон, палітр, панелей інструментів, знаків і розташування їх у різному вигляді і в різних місцях екрану монітора. Типовий робочий вид програми показано на рис.1.4.1. Він складається з основного меню програми (у верхній частині екрана), вікна робочого документа або «блокноту» (notebook) і панелі

(палітри) для введення спец символів і знаків найбільш вживаних математичних операцій (в Mathematica є можливість виклику ще шести стандартних панелей, крім того, користувач сам може створити подібну панель з набором потрібних йому спец символів і команд) [12].

Основне меню програми містить кілька сотень найменувань пунктів меню, підменю, команд, функцій. Вивчити їх відразу неможливо: з короткого опису не можна зрозуміти зміст. Зміст пунктів меню, підменю, команд можна зрозуміти тільки в процесі роботи з системою.

Вікно робочого документа або блокнот складається з комірок. Грубо комірку можна порівняти з параграфом у текстовому редакторі. Вся інформація, яка є в блокноті, зберігається в його комірках. Як тільки в порожньому новому файлі набирається хоча б один символ, Mathematica створить для нього комірку. Комірка також є мінімальною одиницею, яку можна обчислити. Тобто, якщо у комірці є дві формули, обчислити їх окремо не вийде. Усі комірки можна розділити на три типи:

- комірки введення – в них задаються команди (формули), які будуть обчислені;
- комірки результату – у них Mathematica виводить результат обчислень;
- не обчислювані комірки – комірки з текстом, заголовки і все інше, що вводиться користувачем і обчислювати не треба [7, с. 59].

Будь-які клітинки можна об'єднувати і розбивати за допомогою команд меню Cell: Divide Cell (розбити клітинку) і Merge Cells (об'єднати комірки).

Введення даних здійснюється в комірки. Пакет підтримує кирилицю і грецькі літери нарівні з англійським алфавітом. Можна називати змінні російськими літерами, також як і грецькими. У той же час, ідентифікатори розрізняються по регістру, тобто змінна А не те саме, що змінна а [14].

Для швидкого доступу до функцій, розробники Mathematica ввели спеціальні типи вікон, які називаються палітрами. Палітри містять вікна з

кнопками, які виконують дії. Дії можуть бути абсолютно різними: від додавання грецької букви, до розкриття дужок у алгебраїчному виразі. Різні палітри доступні через меню Palettes. Огляд стандартних палітр можна знайти у додатку 3 [12].

Wolfram Mathematica має розвинені засоби форматування тексту. За допомогою їх можна розбивати блокнот на глави і розділи, вводити пояснювальний текст і т.д. Стили можна задати як всьому блокноту, так і окремій комірці цілком, або частково. Також можна змінити відображення всіх стандартних стилів і додати нові.

РОЗДІЛ 2

ВИКОРИСТАННЯ ПРОДУКТІВ КОМПАНІЇ WOLFRAM ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

2.1. Використання системи Wolfram Mathematica під час вивчення математичного аналізу

2.1.1. Обчислення границь функції

Багато функцій при наближенні аргументу до деякого значення або до деякої області значень прагнуть до певної границі. Так, функція $\sin(x)/x$ при x , яка прагне до нуля (позначимо це як $x \rightarrow 0$), дає границю 1 у вигляді усувної невизначеності $0/0$.

Чисельні математичні системи, так само як і більшість програм на звичайних мовах програмування, не сприймають вираз $0/0 \rightarrow 1$ як об'єктивну реальність. Їх захисний механізм налаштований на примітивне правило - нічого не можна ділити на 0. Отже, обчислення $\sin(x)/x$ при $x = 0$ буде супроводжуватися видачею помилки типу «Ділення на 0». Звичайно, в даному конкретному випадку можна передбачити особливий результат – видати 1

при $x = 0$. Але це окремий випадок. У цілому ж подібні системи «не розуміють» поняття границі.

У системі Mathematica границі визначаються за допомогою вбудованої функції `Limit`, яка має вигляд:

Limit [$f(x)$, $x \rightarrow x_0$],

де:

- $f(x)$ - функція, границю якої необхідно визначити;
- x - аргумент функції $f(x)$;
- x_0 - граничне значення x .

При роботі з функцією `Limit` використовуються наступні опції:

- `Analytic` – вказує, чи є невідома функція аналітичною. Опція використовується у вигляді `Analytic→True` (або `False`), значення за замовчуванням – `Automatic`. Великого практичного значення ця опція не має;
- `Direction` - вказує напрямок, в якому відбувається наближення до границі. Опція використовується у вигляді `Direction→-1` (або `+1`), за замовчуванням вибір залишається за системою (`Automatic`). Значення `+1` означає границю ліворуч, а `-1` – праворуч (здавалося б, повинно бути навпаки, але задано саме так).

Застосування опції `Direction` пояснюють приклади, показані на рис.2.1.

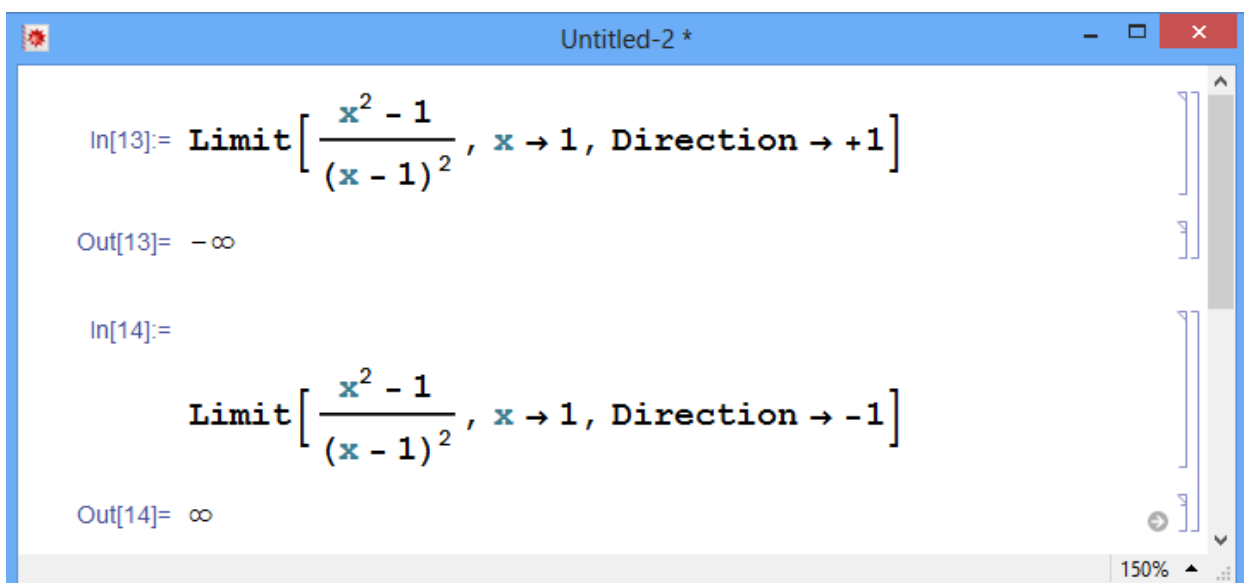


Рис. 2.1 Границя функції

$$\frac{x^2 - 1}{(x - 1)^2}$$

З прикладів видно, що границі при наближенні до них зліва і справа різні. Графік дає пояснення наближень і відповідей. З графіка видно, що функція $\text{ArcTan}\left[\frac{1}{x}\right]$ має розрив і при наближенні до нього ліворуч (+1), границею буде від'ємне значення функції $(-\pi / 2)$, і при наближенні праворуч (-1) – позитивне $(\pi / 2)$ (рис. 2.2).

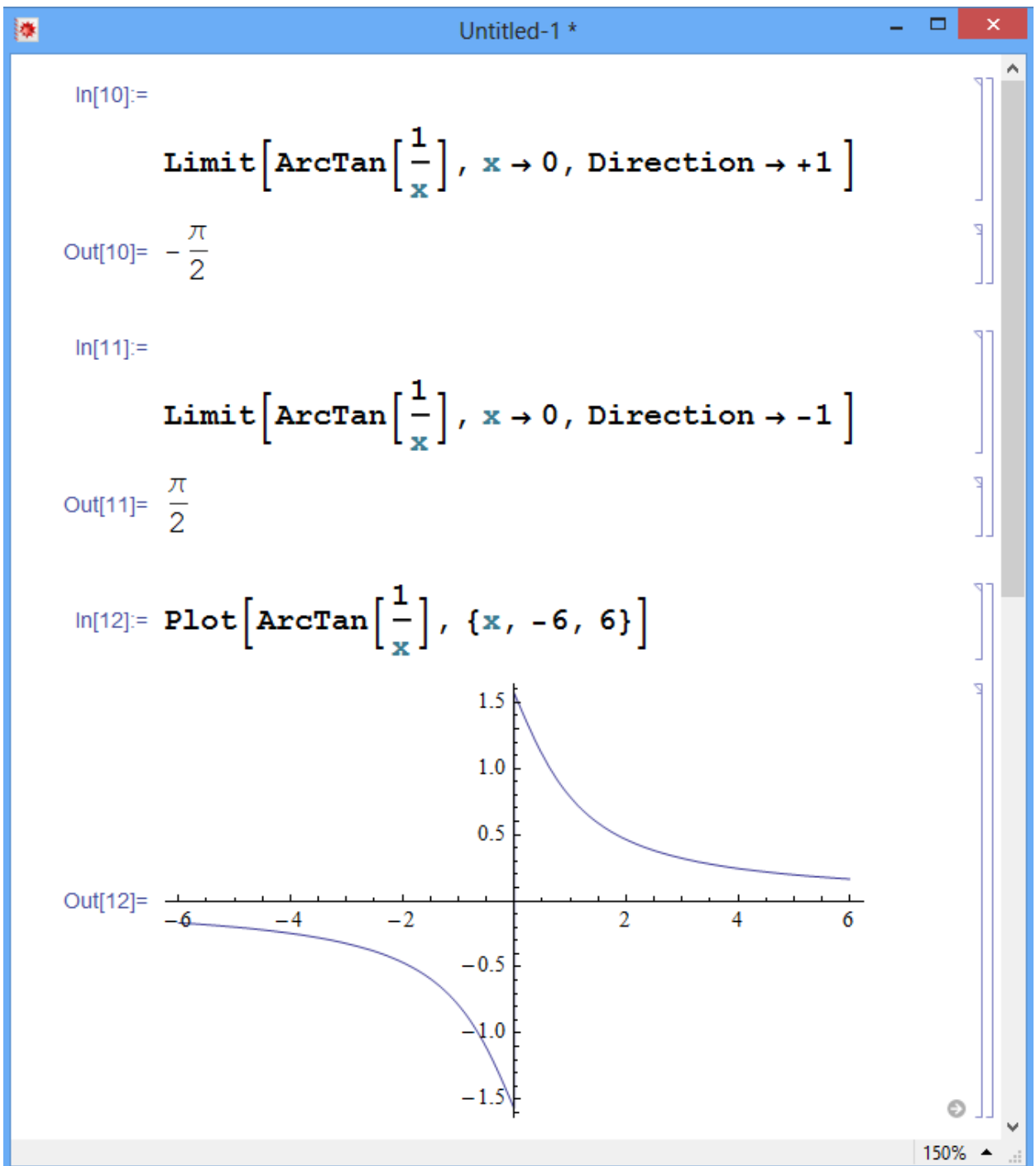


Рис. 2.2 Границя функції

$$\text{ArcTan}\left[\frac{1}{x}\right]$$

2.1.2.Обчислення похідних

До числа найбільш часто використовуваних математичних операцій належить обчислення похідних функцій як в аналітичній, так і в символьній формі. Для цього використовуються такі функції:

- $D[f, x]$ – повертає частинну похідну функції f по змінній x ;
- $D[f, \{x, n\}]$ – повертає частинну похідну n -го порядку по x ;
- $D[f, x_1, x_2, \dots]$ – повертає змішану похідну;
- $Dt[f, x]$ – повертає узагальнену похідну функції f по змінній x ;
- $Dt[f]$ – повертає повний диференціал f .

Для функції D існує опція `NonConstants`, яка дозволяє задати список об'єктів, що знаходяться в неявній залежності від змінних диференціювання. За замовчанням цей список порожній. Для функції Dt є опція `Constants`, яка, навпаки, вказує символи, які є константами (за замовчанням їх список також порожній). На практиці застосовувати дані опції приходить рідко.

Існує ще одна функція, `Derivative[n1, n2, ...][f]`, - основна (загальна) форма подання функції, отриманої в результаті n_1 -кратного диференціювання функції f по першому аргументу, n_2 -кратного - по другому аргументу і т. д.

У цілому засоби для символьного обчислення похідних, які є в ядрі системи `Mathematica`, охоплюють практично всі важливі типи математичних виразів. Вони можуть включати в себе як елементарні, так і спеціальні математичні функції, що вигідно відрізняє систему `Mathematica` від деяких простих систем символьної математики, таких як `Derive`.

2.1.3.Обчислення інтегралів

Одна з найважливіших операцій – обчислення первісних і визначених інтегралів у символьному вигляді. Зауважимо, що визначений інтеграл може бути представлений як аналітичним, так і чисельним значенням. Для обчислення чисельних значень визначених інтегралів розроблено ряд наближених методів – від простих (прямокутників і трапецій) до складних, які автоматично адаптуються до характеру зміни підінтегральної функції $f(x)$.

Для інтегрування в системі Mathematica використовуються наступні функції:

- `Integrate [f, x]` – повертає первісну (невизначений інтеграл) підінтегральної функції f по змінній x ;
- `Integrate [f, {x, xmin, xmax}]` – повертає значення визначеного інтеграла з межами від x_{\min} до x_{\max} ;
- `Integrate [f, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax },...]` – повертає значення кратного інтеграла з межами від x_{\min} до x_{\max} по змінній x , від y_{\min} до y_{\max} по змінній y і т. д.

Для більш зручного вживання цих функцій, також як і для похідної і границі, існують кнопки з відповідними значками на палітрі Basic Math

Assistant  .

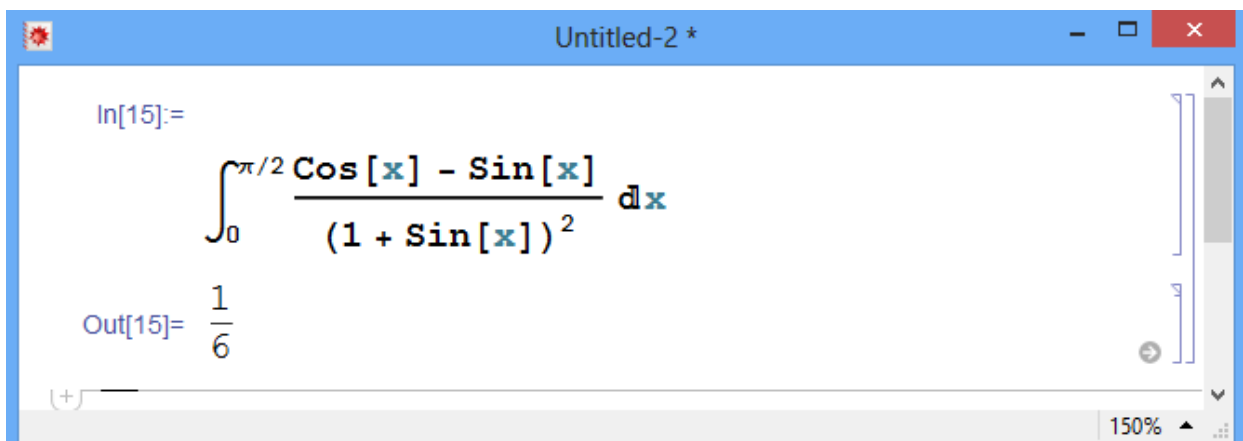


Рис. 2.3 Приклад обчислення визначеного інтеграла

Тут вхідна комірка у першому прикладі представлена у форматі введення (Input-Form), а в інших прикладах – в стандартному форматі (StandardForm), при використанні палітри. При записі інтегралів останній формат кращий зважаючи на наочності, оскільки при цьому знаки інтеграла мають природний математичний вигляд (Рис. 2.3).

Система Mathematica має найширші можливості обчислення інтегралів. Ядро системи увібрало в себе формули інтегрування з усіх відомих довідників.

Mathematica здатна обчислювати навіть кратні інтеграли з фіксованими і змінними, верхнім або нижнім, межами.

Хоча обчислення подвійного інтеграла передбачено в синтаксисі функції Integrate, це не завжди дає результат. Як правило, обчислення кратних інтегралів краще виробляти, використовуючи послідовне обчислення однократних інтегралів, вкладених один в одного.

При обчисленні складних інтегралів, наприклад які не мають представлення через елементарні функції, система Mathematica 2 зверталася до своїх пакетів розширень в спробі знайти рішення, яке може бути представлено через спеціальні математичні функції. Mathematica наступних версій вже не акцентує увагу користувача на свої проблеми і, як правило, видає результат інтегрування. Однак деколи він може мати досить незвичайний вигляд.

Обчислення первісних в системі може дати результати, далекі від тривіального обчислення невизначених інтегралів, приведених у звичайних довідниках з математики. До речі, і при обчисленні тривіальних інтегралів результат може бути іншим, ніж у довідниках, із-за різних перетворень, застосованих для отримання кінцевих формул. Часом можуть знадобитися певні зусилля для отримання результату в заданій формі. Як підінтегральний вираз, так і результати обчислень можуть містити як елементарні, так і спеціальні математичні функції.

Необхідно зазначити, що результати символьного інтегрування в системах Mathematica різних версій нерідко різняться. Більше того, вони можуть різнитися і в межах однієї версії Mathematica, так як ядро системи постійно вдосконалюється. Звичайно більш пізні версії дають більш точні результати обчислень особливих інтегралів, хоча часом вони і виглядають більш складними і навіть незвичайними. Це говорить про необхідність вдумливо ставитися до одержуваних результатів.

Для обчислення чисельних значень визначених інтегралів використовується функція `NIntegrate [f, {x, xmin, xmax}]`, яка повертає чисельне наближення інтеграла від функції f по змінній x в межах від x_{\min} до x_{\max} . Вона має ряд опцій, які можна отримати, виконавши команду `Options [NIntegrate]`.

Функція `NIntegrate` з успіхом може застосовуватися для обчислення як однократних, так і багатократних визначених інтегралів, в тому числі зі змінними межами.

2.1.4. Побудова графіків на площині

У відношенні графіки система Mathematica є лідером серед систем комп'ютерної алгебри. Велика кількість опцій дозволяє оформляти графічні образи практично в будь-якому бажаному вигляді.

Графіки в системі Mathematica є об'єктами і тому вони можуть бути значеннями змінних.

Почнемо розгляд графічних можливостей системи з побудови найпростіших графіків функцій однієї змінної виду $y = f(x)$ або просто $f(x)$. Графік таких функцій будується на площині, тобто в двовимірному просторі. При цьому використовується прямокутна (декартова) система координат. За замовчуванням будуються і лінії координатної системи.

Для побудови двовимірних графіків функцій виду $f(x)$ використовується вбудована в ядро функція Plot:

`Plot [f, {x, xmin, xmax}]` – повертає об'єкт, що представляє собою графік функції f аргументу x в інтервалі від x_{\min} до x_{\max} ;

`Plot [{f1, f2, ...}, {x, xmin, xmax}]` – повертає об'єкт у вигляді графіків ряду функцій f_i .

Функція Plot використовується для побудови однієї або кількох ліній, що дають графічне представлення для зазначених функцій f , f_1 , f_2 і т. д. Приклади застосування функції Plot показані на рис.2.4. Зауважимо, що графіки побудовані без використання будь-яких опцій (точніше, з набором опцій за замовчуванням).

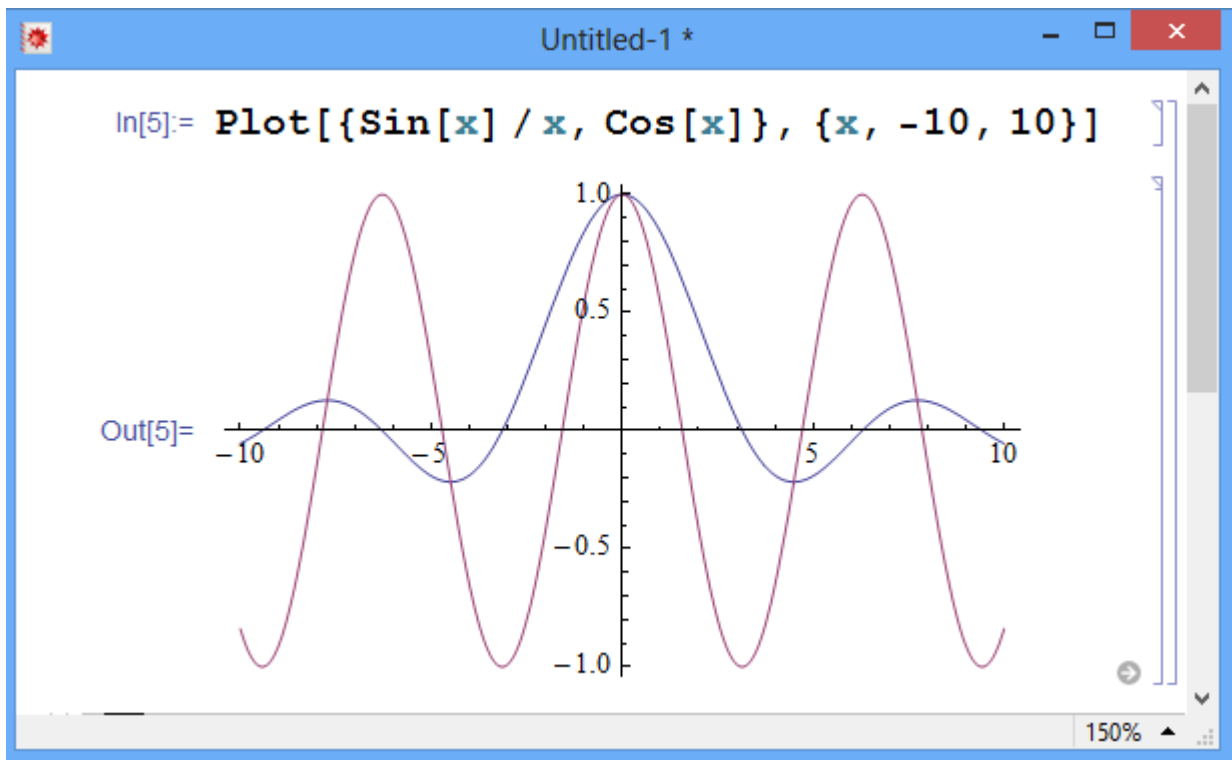


Рис.2.4 Приклади побудови графіків
на площині

В міру ускладнення задач користувачеві рано чи пізно перестануть влаштовувати графіки, одержувані при автоматичному виборі їх стилю та

інших параметрів. Для точного налаштування графіків Mathematica використовує спеціальні опції графічних функцій. Для виведення їх списку треба використовувати команду `Options [Plot]`.

Ще одним важливим засобом настроювання графіків є графічні директиви. Синтаксис їх подібний синтаксису функцій. Однак директиви не повертають об'єктів, а лише впливають на їх характеристики. Застосування графічних директив спільно з опціями дозволяє створювати графіки самого різного виду. Так як список опцій і директив дуже великий, то не будемо на ньому зупинятися.

Також часто виникає необхідність побудови графіка по точках. Це забезпечує вбудована в ядро графічна функція `ListPlot`:

- `ListPlot [{y1, y2 ,...}]` – виводить графік списку величин. Координати x приймають значення 1, 2, ...;
- `ListPlot [{x1, y1}, {x2, y2 },...]` – виводить графік списку величин з зазначеними x і y координатами.

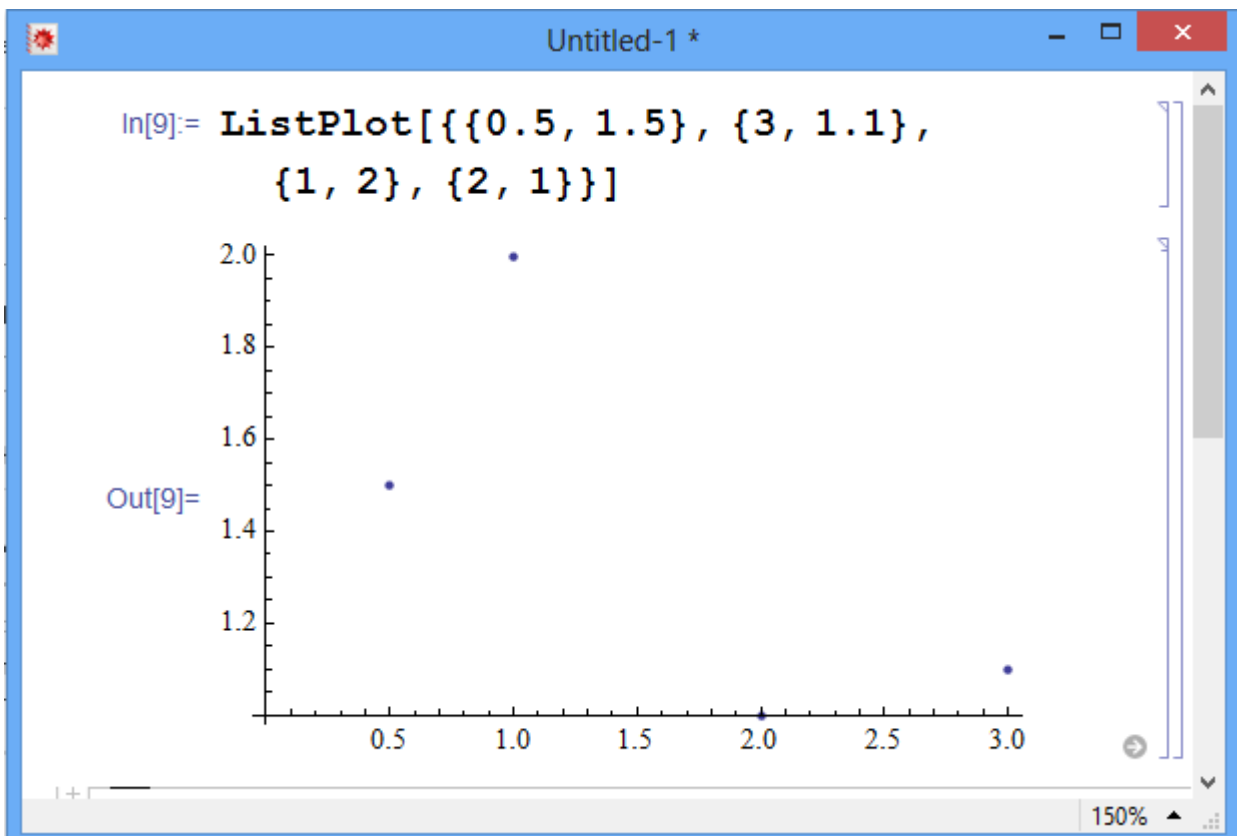


Рис.2.5 Приклад побудови графіка по точках

У найпростішому випадку (рис. 2.5) ця функція сама задає значення координати $x = 0, 1, 2, 3, \dots$ і будує на графіку точки з координатами (x, y) , вибираючи у послідовно зі списку координат.

Функція `ListPlot`, особливо в її другій формі (із заданими координатами x і y), зручна для виведення на графік експериментальних точок.

Система `Mathematica` також дозволяє будувати графіки функцій в полярній системі координат. Побудова графіків в полярній системі координат можливо двома способами. Перший спосіб ґрунтується на використанні звичайної декартової системи координат. Координати кожної точки при цьому задаються в параметричному вигляді: $x = f_x(t)$ і $y = f_y(t)$, де незалежна змінна t змінюється від мінімального значення t_{\min} до максимального t_{\max} . Особливо зручне застосування таких функцій для побудови замкнених ліній, таких як кола, еліпси, циклоїди і т. д.

Для побудови параметрично заданих функцій використовуються наступні графічні засоби:

- `ParametricPlot [{fx, fy}, {t, tmin, tmax}]` – будує параметричний графік з координатами fx і fy (відповідними x і y), одержуваними як функції від t ;
- `ParametricPlot [{ {fx, fy}, {gx, gy }, ... }, {t, tmin, tmax}]` – будує графіки декількох параметричних кривих.

Функції fx , fy можуть бути як безпосередньо вписані в список параметрів, так і визначені як функції користувача.

2.1.5. Побудова графіків поверхонь

Функція двох змінних $z = f(x, y)$ утворює в просторі деяку тривимірну поверхню або фігуру. Для їх побудови доводиться використовувати координатну систему з трьома осями координат: x , y і z . Оскільки екран дисплея плоский, то насправді об'ємність фігур лише імітується.

Для побудови графіків тривимірних поверхонь в системі Mathematica використовується основна графічна функція Plot3D:

- `Plot3D [f, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}]` – будує тривимірний графік функції $f(x, y)$;
- `Plot3D [{f, s}, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}]` – будує тривимірний графік, в якому висоту поверхні визначає параметр f , а затінення - параметр s .

На рис.2.6 показаний приклад побудови поверхні, що описується функцією двох змінних x^2+z^2 при x і z , що міняються від -1 до 1. Поверхня будується у вигляді каркасу з прямокутними комірками з використанням функціонального забарвлення. Всі опції задані за замовчуванням.

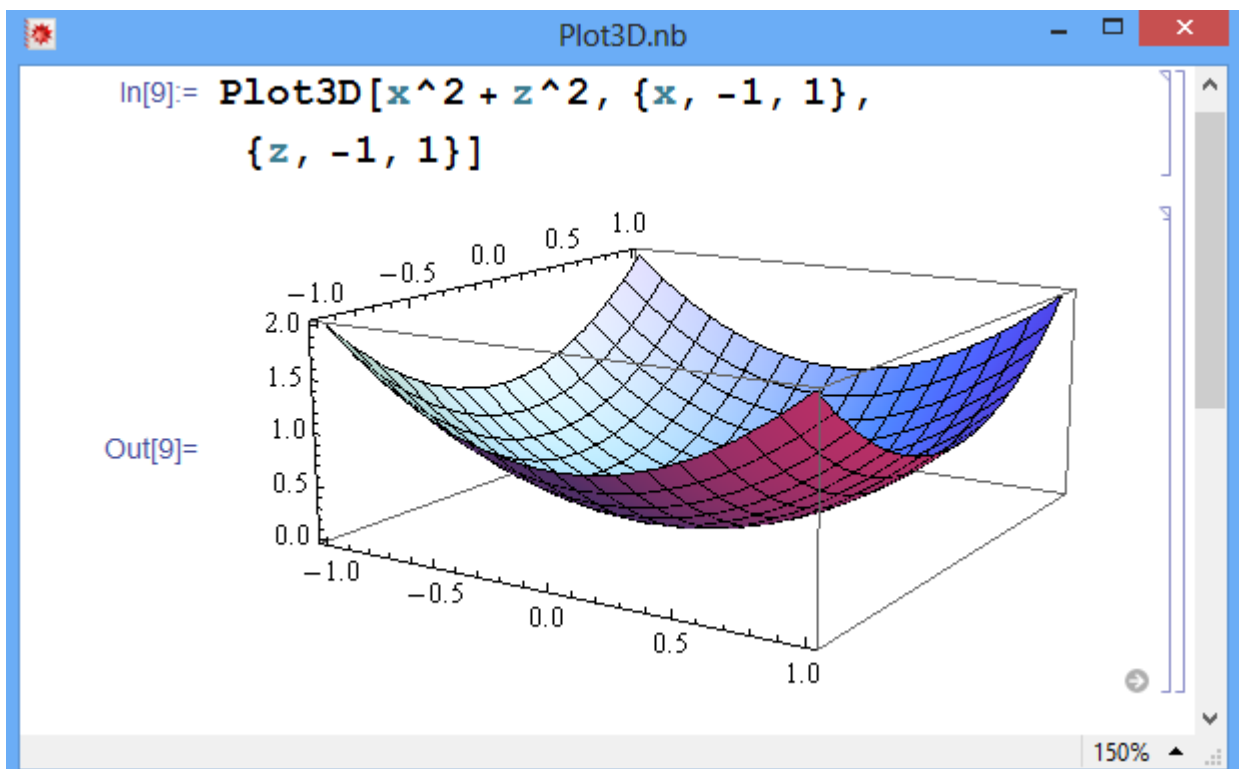


Рис.2.6 Приклад побудови поверхні

Поверхні, також як і графіки на площині, можна будувати по точкам та в параметричній формі використовуючи при цьому відповідні функції ListPointPlot3D і ParametricPlot3D.

Для модифікації тривимірних графіків можуть використовуватися численні опції та директиви. Їх застосування дозволяє будувати велику кількість графіків різних типів навіть при завданні однієї і тієї ж поверхні.

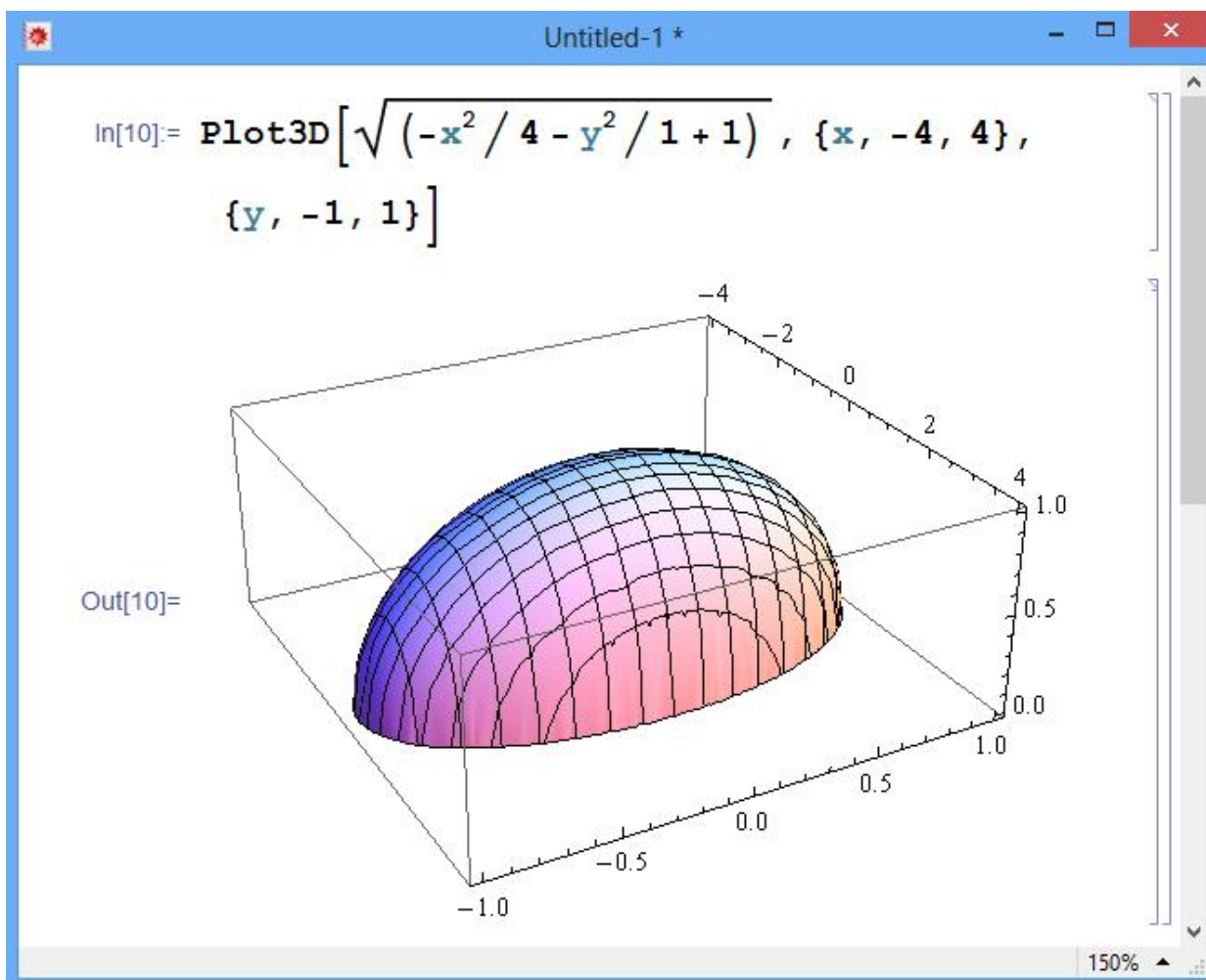


Рис.2.7 Приклад побудови поверхні

Ми можемо будувати різні поверхні (рис. 2.7).

Провівши певні налаштування ми можемо отримати досить гарні зображення поверхонь.

За допомогою коду поданого нижче, можна отримати чітку поверхню (рис. 2.)

```
g1:=ParametricPlot3D[{2 Cos[u] Cos[v],2 Cos[u] Sin[v],2
Sin[u]},{u,-Pi,Pi},{v,0,2 Pi},PlotPoints→50]
g2:=ParametricPlot3D[{Cos[v]+1,Sin[v],u},{u,-3,3},{v,0,2
Pi},PlotPoints→50]
g3:=ContourPlot3D[{x^2+y^2+z^2-4,(x-1)^2+y^2-1},{x,-
2,2},{y,-2,2},{z,-
2,2},RegionFunction→Function[{x,y,z},x^2+y^2+z^2<4],PlotPoi
nts→50,BoundaryStyle→Directive[Red,Thick]]
Show[g1,g2,g3]
```

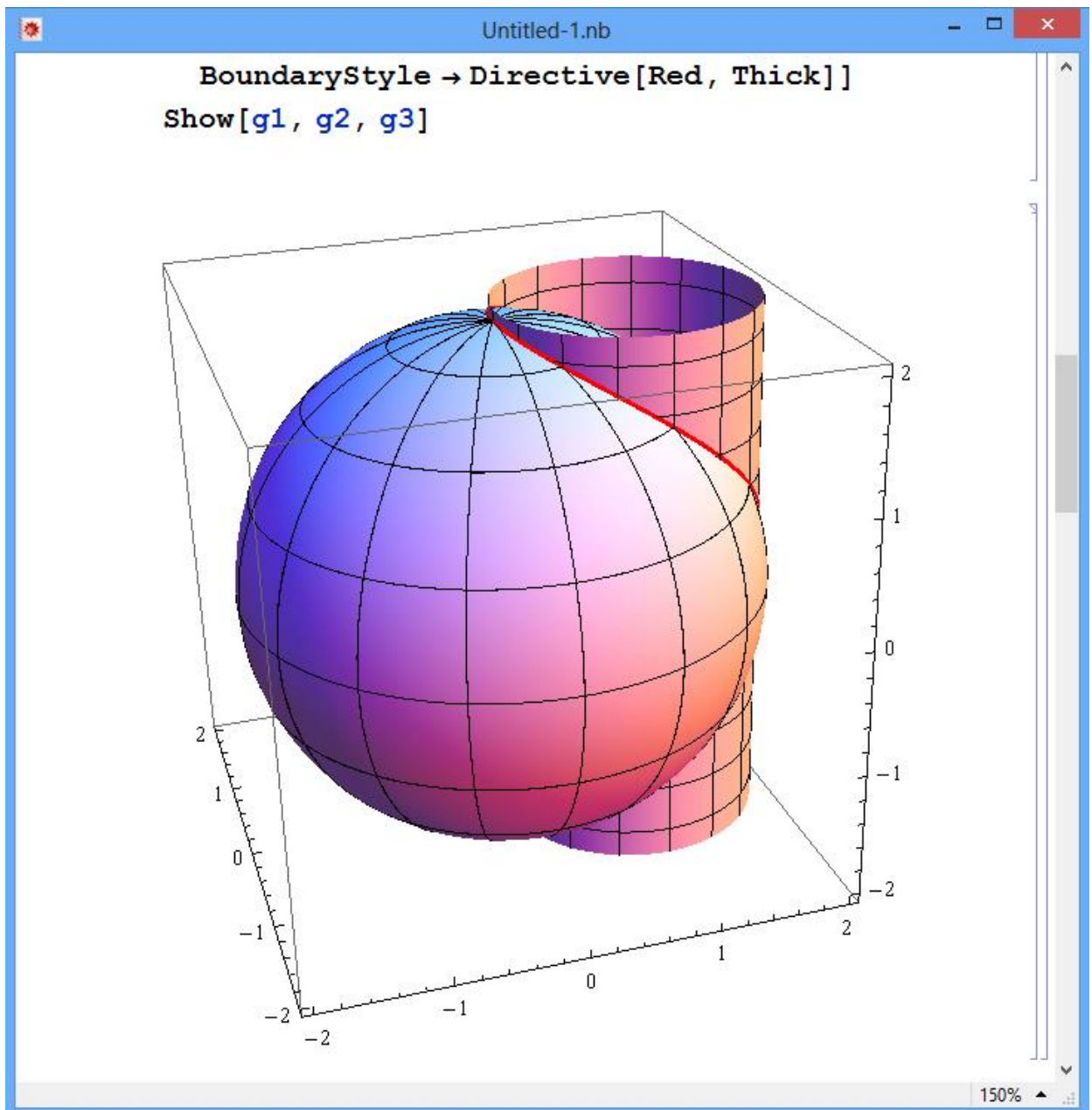


Рис.2.8 Приклад побудови поверхні


2.2. ВИКОРИСТАННЯ СЕРВІСУ «WOLFRAM ALPHA PRO»

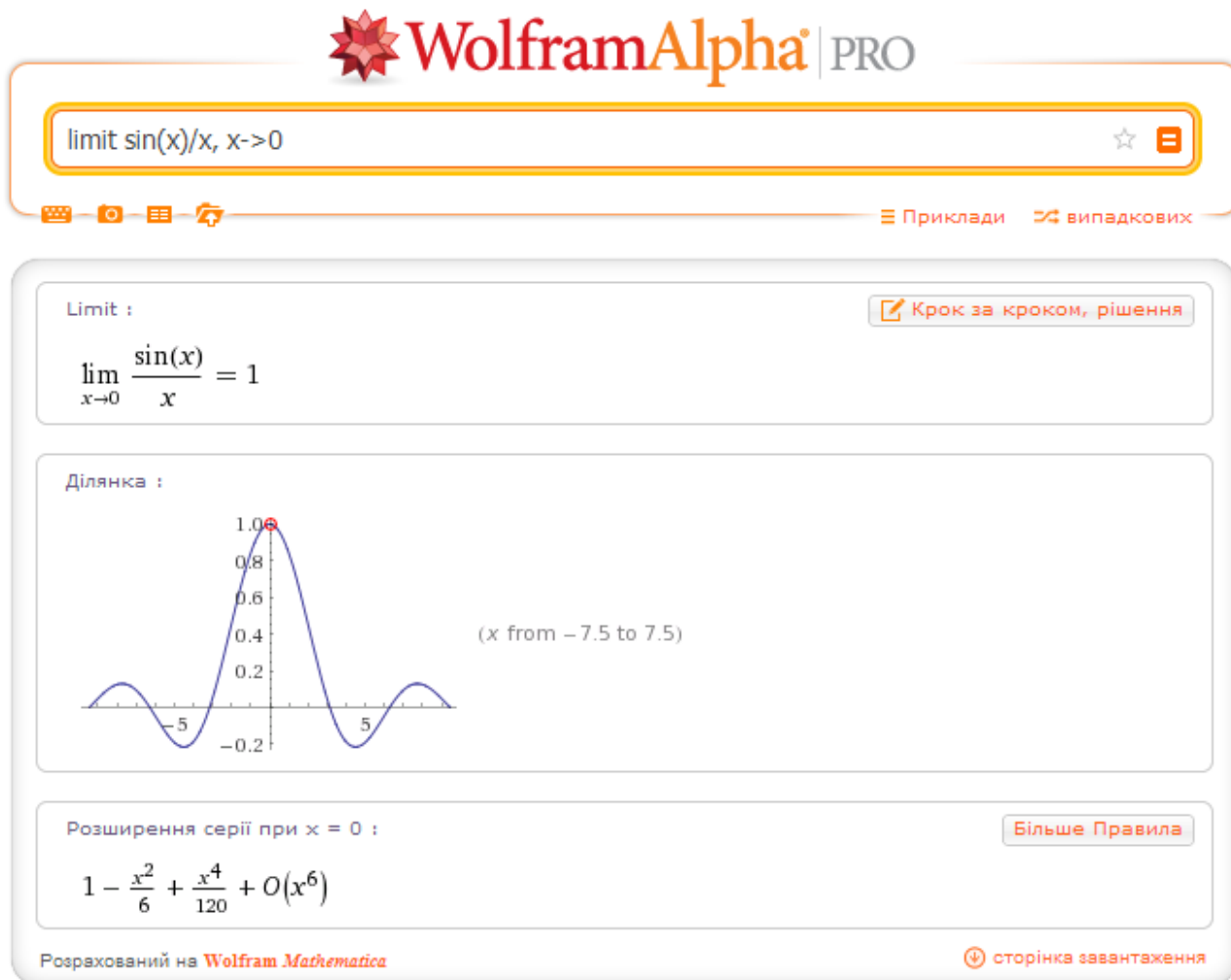
2.2.1. Обчислення границь в «Wolfram Alpha Pro»

Для обчислення границь Wolfram Alpha використовує запит **limit** або **lim**. Щоб обчислити границю необхідно вказати запит **limit**, після нього –

функцію через пробіл, потім кома, пробіл, і змінна та значення, до якого вона прямує. Для прикладу обчислимо **Першу цікаву границю**:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

Щоб отримати результат необхідно в рядок ввести команду і натиснути кнопку «обчислити»  або клавішу «Enter».



WolframAlpha PRO

limit sin(x)/x, x->0

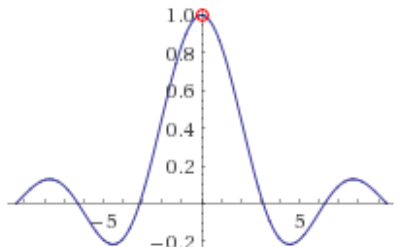
Приклади випадкових

Limit :

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Крок за кроком, рішення

Ділянка :



(x from -7.5 to 7.5)

Розширення серії при $x = 0$:

$1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + O(x^6)$


Більше Правил

Розрахований на Wolfram Mathematica

сторінка завантаження

Рис. 2.9

На рисунку 2.9 ми бачимо результат виконання. Крім значення границі ми маємо її графік та розкладання в ряд в точці $x=0$. Це додаткові опції, які використовуються за замовчуванням.

Якщо натиснути «Крок за кроком, рішення»  ми отримаємо покрокове знаходження границі з поясненням (але на англійській мові), що ми і бачимо на рис. 2.10

Wolfram|Alpha Step-by-step Solution

Limit :

Take the limit:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

Indeterminate form of type 0/0. Applying L'Hospital's rule we have,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d \sin(x)}{dx}}{\frac{dx}{dx}} : \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) \end{aligned}$$

The limit of $\cos(x)$ as x approaches 0 is 1:

Answer:

$$= 1$$



Рис. 2.10

Знайдемо границю тієї самої функції, але при x який прямує до нескінченності. Знак нескінченності можна ввести як «**infinity**» або «**oo**» - дві англійські букви «**o**» підряд. Команда:

$$\mathbf{\text{limit sin}(x)/x, x \rightarrow \text{oo}}$$

Результат виконання ми бачимо на рис. 2.11.

WolframAlpha | PRO

limit sin(x)/x, x->oo

Приклади випадкових

Limit :

Крок за кроком, рішення

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$

Розрахований на Wolfram Mathematica

сторінка завантаження

Рис. 2.11

Wolfram|Alpha Step-by-step Solution

Limit :

Take the limit:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x}$$

sin(x) is bounded and $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, therefore $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$:

The limit of a constant is the constant:

Answer:


= 0

Download Share A

Рис. 2.12

Якщо натиснути кнопку Крок за кроком, рішення ми отримаємо покрокове знаходження границі з поясненням на англійській мові, що ми і бачимо на рис. 2.12. Якщо в когось проблеми з розумінням англійської,

рекомендую використати автоматичний переклад сторінки з англійської на українську. Робити це зручно в браузері **Google Chrome (Версія 26)**.

Щоб браузер переклав пояснення потрібно натиснути кнопку . Отримаємо переклад (Рис. 2.13). Слід вдумливо до нього ставитись, бо машинний переклад не завжди точний.

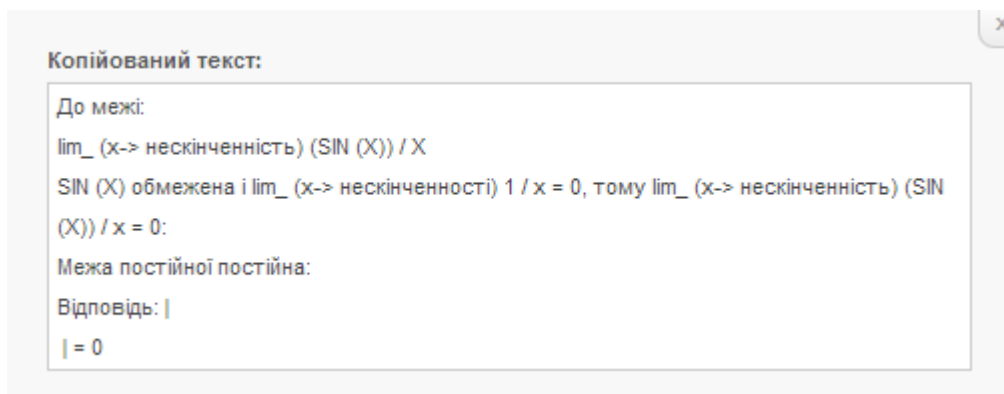




Рис. 2.13

Розглянемо Другу цікаву границю:

$$\lim (1+1/x)^x, x \rightarrow \infty$$

 **WolframAlpha** | PRO

Input: $\lim (1+1/x)^x, x \rightarrow \infty$

Limit : Зразковий вид  Крок за кроком, рішення

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Серія розширення при $x = \infty$: Більше Правил

$$e - \frac{e}{2x} + \frac{11e}{24x^2} - \frac{7e}{16x^3} + \frac{2447e}{5760x^4} + O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^5\right)$$


Розрахований на **Wolfram Mathematica**  сторінка завантаження

Рис. 2.14

Результат цілком передбачуваний(рис. 2.14). Надзвичайно цікавим є відшукування цієї границі (Рис. 2.15, переклад на українську Рис. 2.16).

Wolfram|Alpha Step-by-step Solution

Limit :

Take the limit:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + 1 \right)^x$$

Indeterminate form of type 1^∞ . Transform using $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \log \left(1 + \frac{1}{x} \right)}$;

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \log \left(1 + \frac{1}{x} \right)}$$

Indeterminate form of type $0 \cdot \infty$. Let $t = \frac{1}{x}$, then $\lim_{x \rightarrow \infty} x \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(t+1)}{t}$;

$$= e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(t+1)}{t}}$$

Indeterminate form of type $0/0$. Applying L'Hospital's rule we have,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(t+1)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{d \log(t+1)}{dt}}{\frac{dt}{dt}};$$

$$= e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t+1}}$$

The limit of a quotient is the quotient of the limits:

The limit of a constant is the constant:

$$= e^{\frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} (t+1)}}$$

The limit of $t + 1$ as t approaches 0 is 1:

Answer:

$$= e$$

Рис.2.15

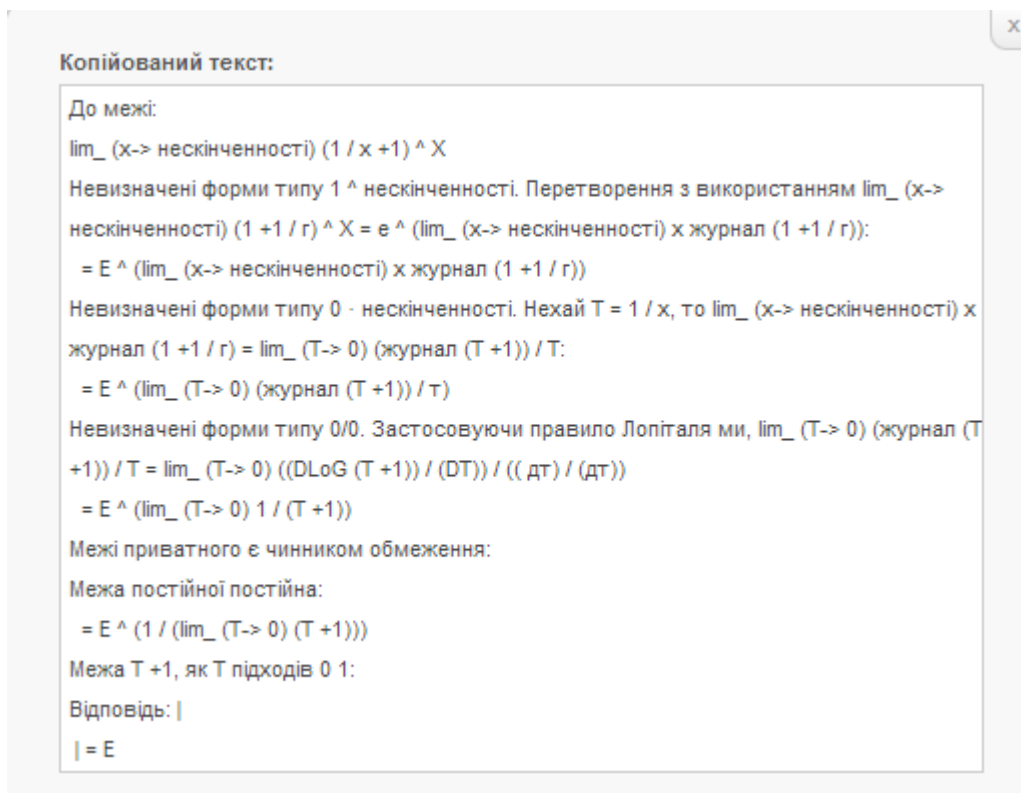


Рис. 2.16

Wolfram Alpha може обчислити дану границю у більш загальній формі:

$$\lim (1+ax/b)^{(m/nx)}, x \rightarrow 0$$

(Результат на Рис. 2.17)

WolframAlpha | PRO

$\lim (1+ax/b)^{(m/nx)}, x \rightarrow 0$

Limit :

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{ax}{b}\right)^{\frac{m}{nx}} = e^{\frac{am}{bn}}$

Зразковий вид Крок за кроком, рішення

Рис. 2.17

Якщо натиснути кнопку «Крок за кроком, рішення», ми отримаємо цілком передбачуваний результат, який зображено на рисунку 2.18.

Limit :

Take the limit:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{ax}{b}\right)^{\frac{m}{nx}}$$

Indeterminate form of type 1^∞ . Transform using $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{ax}{b}\right)^{\frac{m}{nx}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{m \log\left(1 + \frac{ax}{b}\right)}{nx}}$:

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{m \log\left(1 + \frac{ax}{b}\right)}{nx}}$$

Factor out constants:

$$= e^{\frac{m}{n} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log\left(1 + \frac{ax}{b}\right)}{x}}$$

Indeterminate form of type $0/0$. Applying L'Hospital's rule we have,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log\left(1 + \frac{ax}{b}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} \log\left(1 + \frac{ax}{b}\right)}{\frac{dx}{dx}}$$

$$= e^{\frac{m}{n} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{b + ax} \right)}$$

Factor out constants:

$$= e^{\frac{am}{n} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{b + ax} \right)}$$

The limit of a quotient is the quotient of the limits:

The limit of a constant is the constant:

$$= e^{\frac{am}{n} \left(\lim_{x \rightarrow 0} (b + ax) \right)}$$

The limit of $b + ax$ as x approaches 0 is b :

Answer:

$$= e^{\frac{am}{bn}}$$

Рис. 2.18

Виникає логічне питання – як сервіс поведе себе в точках розриву? У точках розриву Wolfram Alpha обчислює односторонні межі і виводить графічну ілюстрацію. Для прикладу розглянемо границю

$$\lim (x^2-1)/(x-1)^2, x \rightarrow 1$$

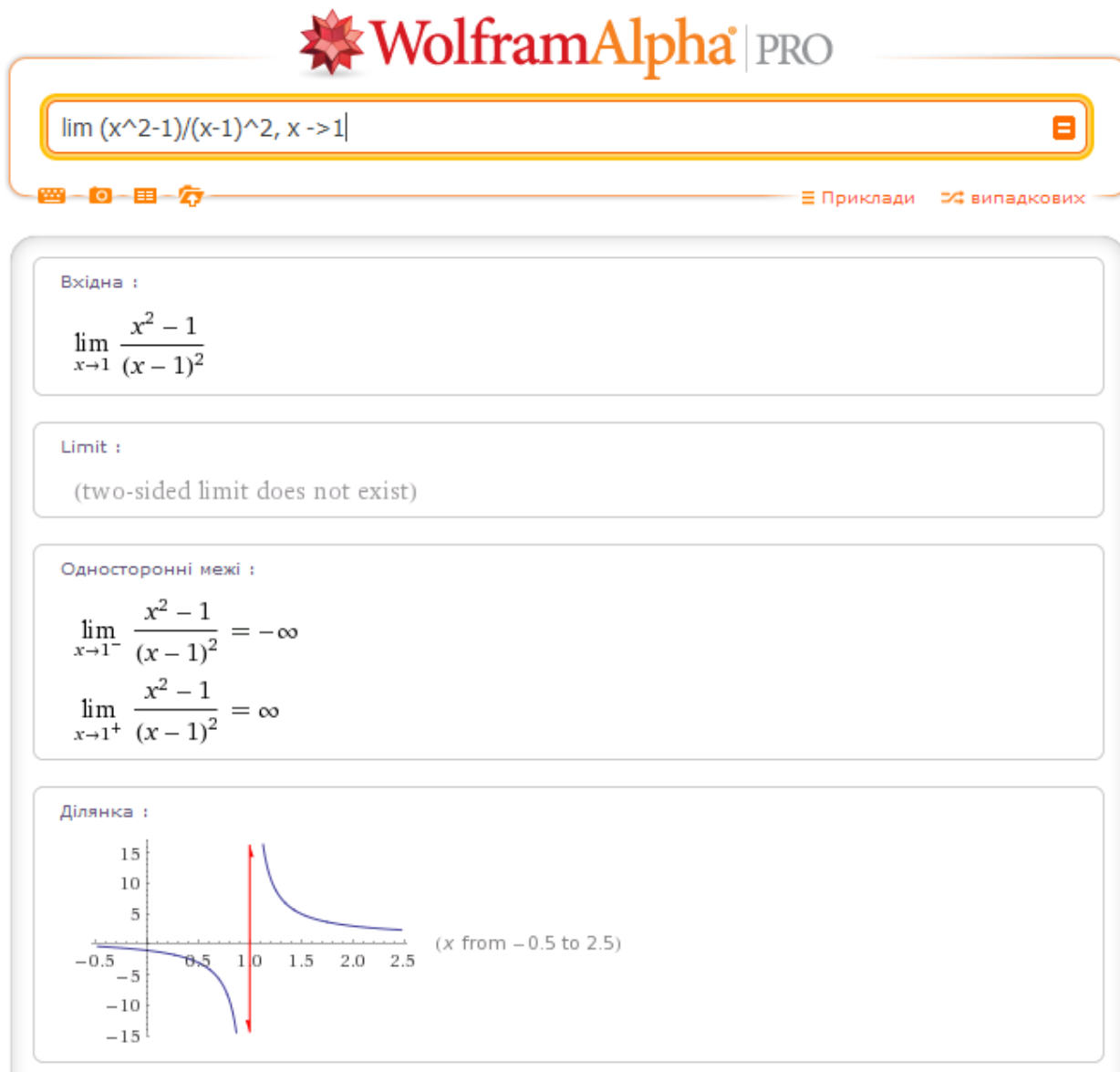


Рис. 2.19

Програма видала результат, що границі в точці 1 не існує, але існують односторонні границі. Крім того, ми отримали графічне зображення.

Розглянемо ще один приклад:

$$\lim e^{1/(x-1/2)}, x \rightarrow 1/2$$

Результат (Рис. 2.20) аналогічний.

$$\lim e^{1/(x-1/2)}, x \rightarrow 1/2$$

 Приклади  випадкових

Вхідна :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} e^{\frac{1}{x-1/2}}$$

Limit :

(two-sided limit does not exist)

Односторонні межі :

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} e^{\frac{1}{x-1/2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} e^{\frac{1}{x-1/2}} = \infty$$

Ділянка :

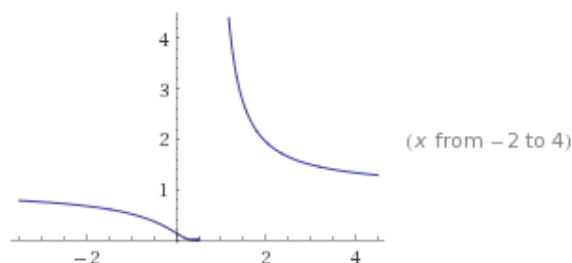


Рис. 2.20

Якщо потрібна тільки **ліва** або **права** границя, то слід використовувати наступний синтаксис запити:

$$\lim e^{1/(x-1/2)}, x \rightarrow (1/2)^-$$

У відповідь на запит ми отримали границю зліва. Також програма додатково продемонструвала нам границю справа і графічне представлення (Рис. 2.21).

Аналогічно отримаємо границю справа за запитом:

$$\lim e^{1/(x-1/2)}, x \rightarrow (1/2)^+$$

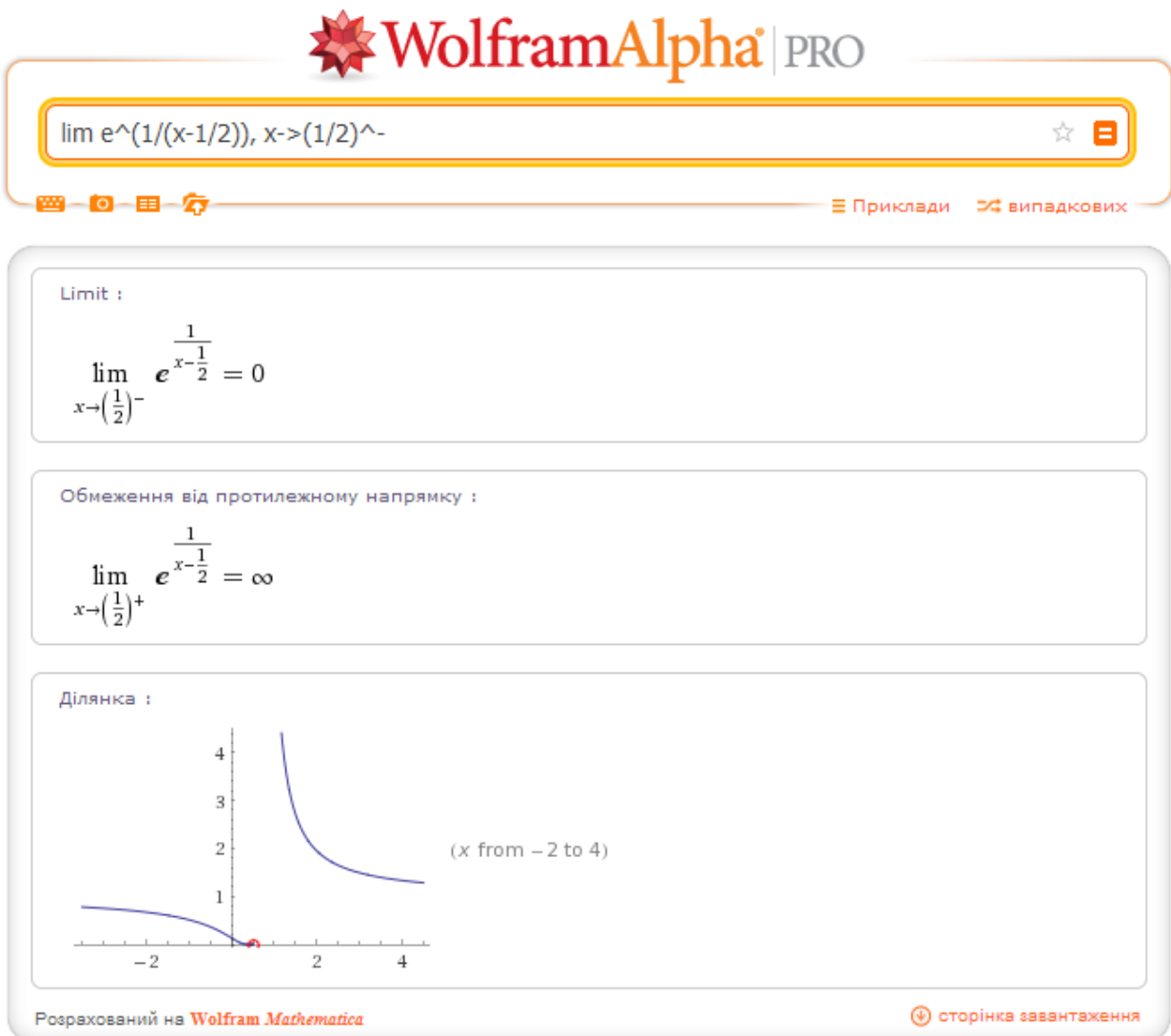


Рис. 2.21

До речі, Wolfram Alpha вміє визначати і ті особливі випадки, коли межа не існує:

$$\lim \sin(1/x), x \rightarrow 0$$

Результат на рис. 2.22.

Як ми бачимо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \text{undefined in the interval } (-1, 1) \text{ (limit does not exist)}$$

(невизначена в інтервалі $(-1, 1)$ (Границі не існує))

Також ми отримали графік функції, що наглядно демонструє результат. Після таких роз'яснень питань не повинно виникати.

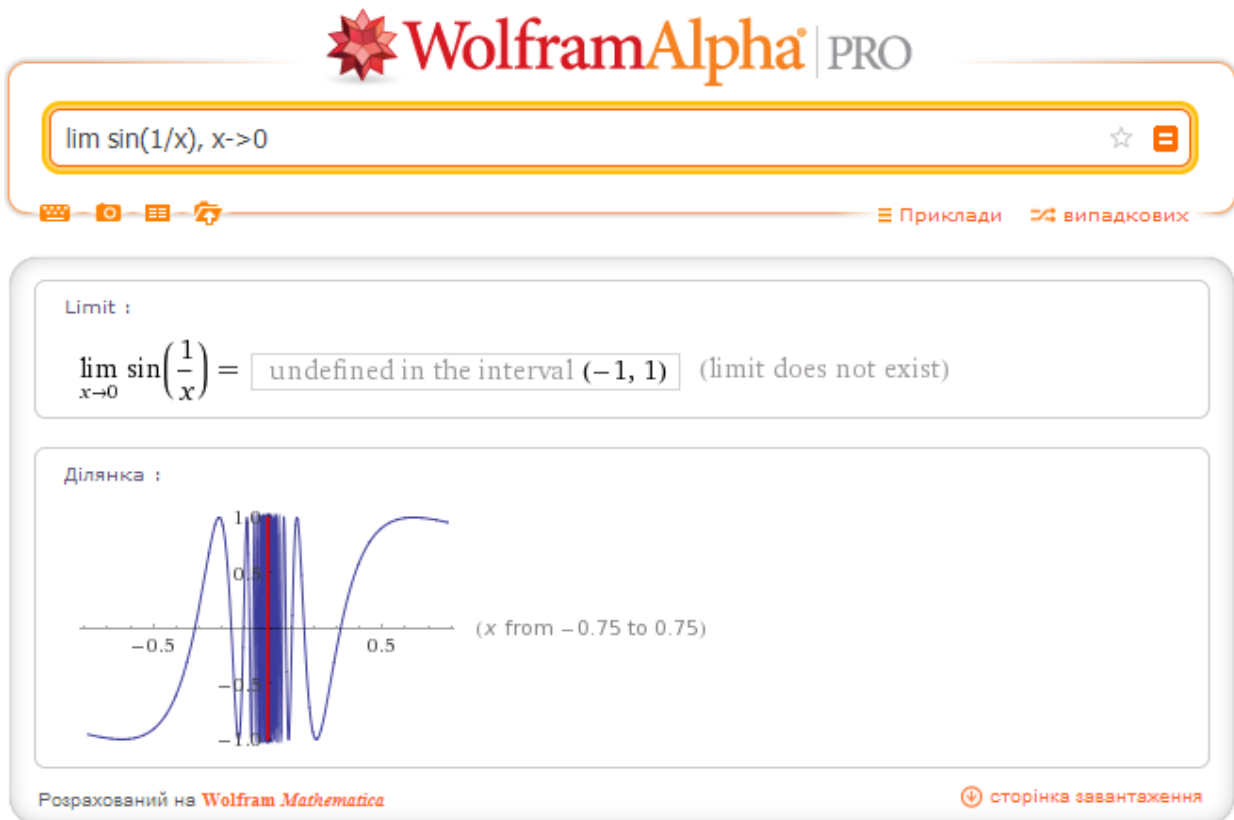


Рис. 2.22

2.2.2. Дослідження рядів в «Wolfram Alpha Pro»

Для дослідження збіжності числових рядів Wolfram Alpha пропонує кілька можливостей.

Наприклад, щоб просто дізнатися сходиться або розходиться даний числовий ряд, можна звернутися до Wolfram Alpha на "природній мові" одним із таких способів:

- **convergence of series 1/n^3**
- **series convergence 1/n^3**
- **convergence of 1/n^3**
- **convergence 1/n^3**

У всіх цих випадках Wolfram Alpha інтерпретує запит однаково, і виводить наступний результат:

WolframAlpha | PRO

convergence 1/n³ ☆

Приклади випадкових

Вхідна : convergence conditions $\sum_n \frac{1}{n^3}$

Результат : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ converges

Розрахований на Wolfram Mathematica сторінка завантаження

Рис. 2.23

На рис. 2.23 ми бачимо наш ряд у звичному для нас представленні в комірці «Вхідна:». В комірці «Результат:» відповідь програми – «**converges**» (збіжний). Спробуємо дослідити інший ряд:

convergence ((n+1)!*7^n)/n^2

WolframAlpha | PRO

convergence ((n+1)!*7^n)/n^2 ☆

Приклади випадкових

Вхідна : convergence conditions $\sum_n \frac{(n+1)! 7^n}{n^2}$

n! is the factorial function »

Результат : $\sum_n \frac{7^n (1+n)!}{n^2}$ does not converge

Рис. 2.24

Результат (рис. 2.24) – «does not converge» (не збіжний, тобто розбіжний).

Однак, всі, звичайно, пам'ятають, що числовий ряд, це – сума членів нескінченної числової послідовності. Значить, для дослідження числового ряду можна використовувати запит **Sum**, який дає більше інформації про числовий ряд (рис. 2.25):

$$\text{Sum} [((n+1)!*7^n)/n^2, n]$$

The screenshot shows the WolframAlpha PRO interface. At the top, the search bar contains the input: $\text{Sum} [((n+1)!*7^n)/n^2, n]$. Below the search bar, the result is displayed as: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n (1+n)!}{n^2}$ (sum does not converge). A note indicates that $n!$ is the factorial function. Below the result, the convergence test is shown: "By the limit test, the series diverges." The partial sum formula is also displayed: $\sum_{n=1}^m \frac{7^n (1+n)!}{n^2} = \text{DifferenceRoot}[\{y, \eta\} \mapsto \{7(\eta+2)\eta^2 y(\eta) + (-7\eta^3 - 15\eta^2 - 2\eta - 1)y(\eta+1) + (\eta+1)^2 y(\eta+2) = 0, y(1) = 0, y(2) = 14\}](m+1)$. At the bottom, a plot titled "Private sums" shows the partial sums for $n=1$ to $n=5$. The y-axis ranges from 0 to 1.2×10^6 . The plot shows that the sum is zero for $n=1, 2, 3, 4$ and then jumps to approximately 5×10^5 for $n=5$.

Рис. 2.25

2.2.3.Інтеграл в «Wolfram Alpha Pro»

Для інтегрування функцій в Wolfram Alpha служить запит **integrate**. Також можна використовувати **integral**. Іноді Wolfram Alpha розуміє також скорочену форму **Int**. Однак, краще її не використовувати, оскільки **Int** традиційно застосовується для позначення цілої частини числа.

Наведемо кілька прикладів інтегрування функцій в Wolfram Alpha.

Для початку простий приклад:

integrate 1

The screenshot shows the Wolfram Alpha Pro interface. At the top, the Wolfram Alpha logo is visible. Below it, a search bar contains the text 'integrate 1'. The results section displays the text 'Невизначений інтеграл :' followed by the mathematical expression $\int 1 dx = x + \text{constant}$. To the right of the expression is a button labeled 'Крок за кроком, рішення'. At the bottom left, it says 'Розрахований на Wolfram Mathematica', and at the bottom right, there is a button labeled 'сторінка завантаження'.

Рис. 2.26 Результат виконання **integrate 1**


В результаті запиту ми отримали невизначений інтеграл та результат його обчислення у вигляді функції та константи(Рис. 2.26). Привертає увагу те, що тут присутня константа на відміну від програми, де константа не вказана.


Тепер спробуємо обчислити стандартний інтеграл від многочлена x^2-2x+3 . Для цього скористаємось командою


integrate x^2-2x+3

Як бачимо (Рис. 2.27), Wolfram Alpha з завданням справилась.

В даному випадку ми отримали навіть більше, ніж очікували – крім результату інтегрування ми можемо побачити графік підінтегральної функції та альтернативні форми запису результату.

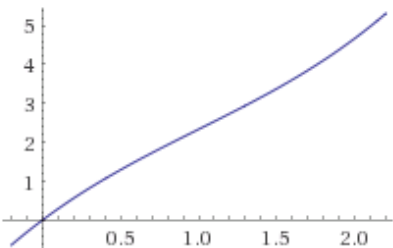
 **WolframAlpha** | PRO

☆ 


Невизначений інтеграл :  Крок за кроком, рішення

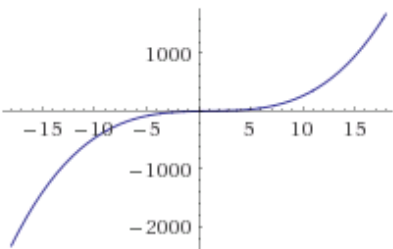
$$\int (x^2 - 2x + 3) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + \text{constant}$$

Земельні інтеграл :




(x from 0 to 2)

Включити інтерактивності 



(x from -15 to 15)

Включити інтерактивності 

Альтернативні форми інтеграла : Більше

$$\frac{1}{3} x ((x - 3) x + 9) + \text{constant}$$

$$\frac{1}{3} x (x^2 - 3x + 9) + \text{constant}$$

$$x \left(\left(\frac{x}{3} - 1 \right) x + 3 \right) + \text{constant}$$


Розрахований на **Wolfram Mathematica**  сторінка завантаження

Рис. 2.27 Результат виконання **integrate x²-2x+3**

При цьому ми отримали цілих два графіки: на першому – на відріжку $[0;2]$, на другому – на відріжку $[-15;15]$. Це дає нам змогу побачити як веде себе підінтегральна функція. Альтернативні форми інтеграла можна використати для звірення відповіді або подальших обчислень.

Wolfram|Alpha Step-by-step Solution

Невизначений інтеграл :

Take the integral:

$$\int (x^2 - 2x + 3) dx$$

Integrate the sum term by term and factor out constants:

$$= \int x^2 dx + 3 \int 1 dx - 2 \int x dx$$

The integral of 1 is x:

$$= \int x^2 dx + 3x - 2 \int x dx$$

The integral of x is $\frac{x^2}{2}$:

$$= -x^2 + \int x^2 dx + 3x$$

The integral of x^2 is $\frac{x^3}{3}$:
Answer:

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + \text{constant}$$

Download Share Print

Рис. 2.28 Результат роботи кнопки «Крок за кроком, рішення».

Дуже бажаним буде активація кнопки «Крок за кроком, рішення». Для цього необхідно придбати ПРО версію, або використати пробну на 14 днів.

Після натискання на кнопку «Крок за кроком, рішення». ми отримаємо покрокове виконання завдання (Рис. 2.28).

Якщо не враховувати те, що пояснення дій на англійській мові, то результат просто вражає.

2.2.4. Обчислення площі плоскої фігури в Wolfram Alpha

В математиці будь-яку плоску фігуру, обмежену кривими лініями, прийнято називати криволінійної трапецією. Площа криволінійної трапеції обчислюється за допомогою визначеного інтеграла.[1, 1]

У Wolfram Alpha для обчислення площ криволінійних трапецій в найпростіших випадках можна використовувати спеціальний запит `area between`, параметрами якого служать рівняння кривих, що обмежують дану фігуру. Наприклад:

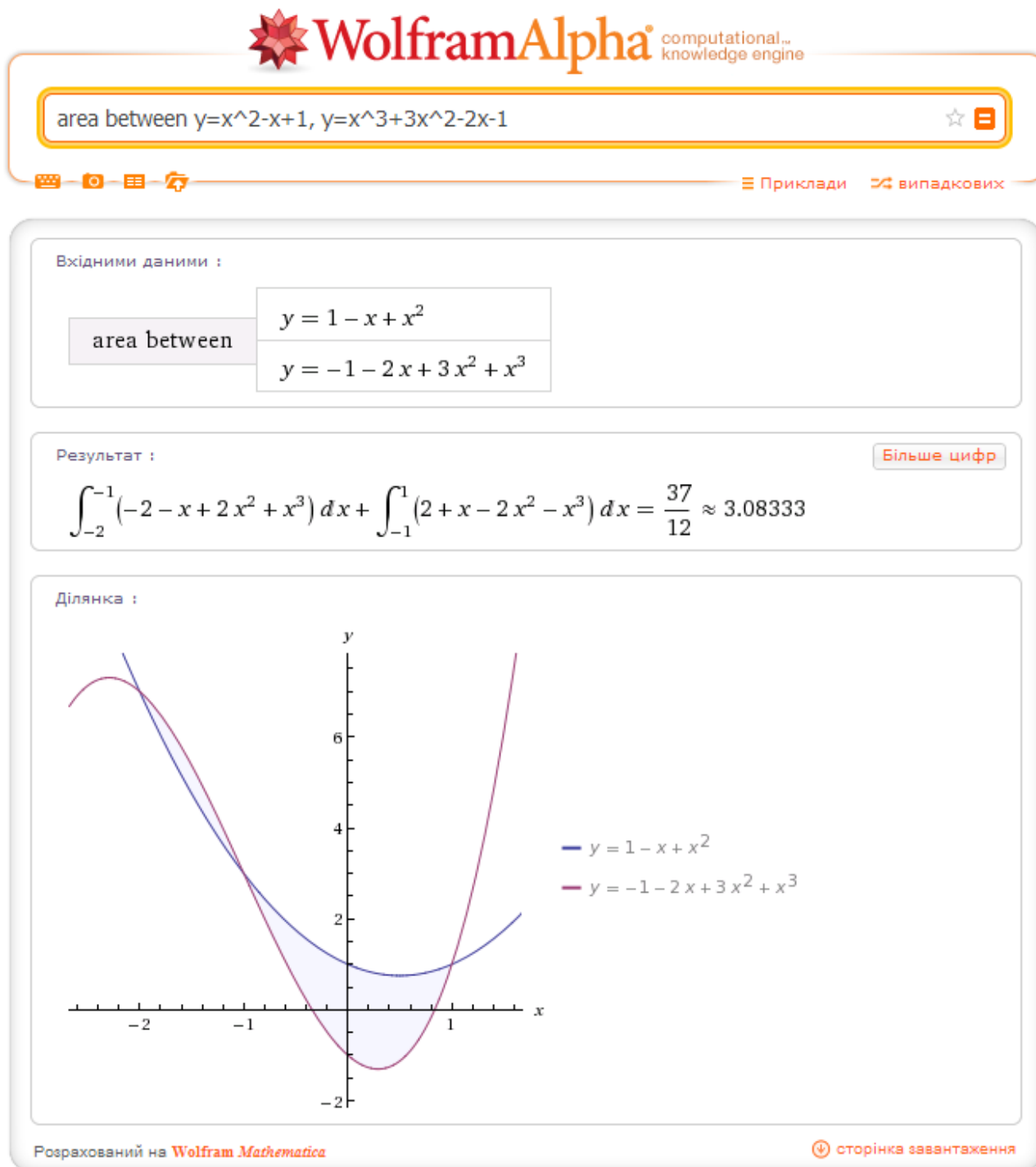
area between $y=x^2-x+1$, $y=x^3+3x^2-2x-1$

(Результат виконання запиту на рисунку 2.29)

Результат виконання досить ілюстративний:

- ми бачимо вхідні дані у звичному для нас вигляді;
- результат подається у вигляді інтеграла (або суми інтегралів) з межами інтегрування;
- обчислюється точне значення інтеграла, де це можливо, та наближене значення;
- подається ділянка – площа плоскої фігури, яку ми обчислюємо(зафарбована блакитним кольором).

Для більш складних випадків запит **area between** інколи не спрацьовує.

Рис. 2.29 Результат виконання **area between**для $y=x^2-x+1$, $y=x^3+3x^2-2x-1$

Якщо відомі межі інтегрування, то для обчислення площі фігури, обмеженої двома лініями, в запиті **area between** можна вказати додатково

область визначення (**domain**) - відрізок по осі Ox , над яким обчислюється площа:

area between $y=x^2-1$, $y=\ln x$ domain $x=0.5..1$

(результат виконання Рис. 2.30)

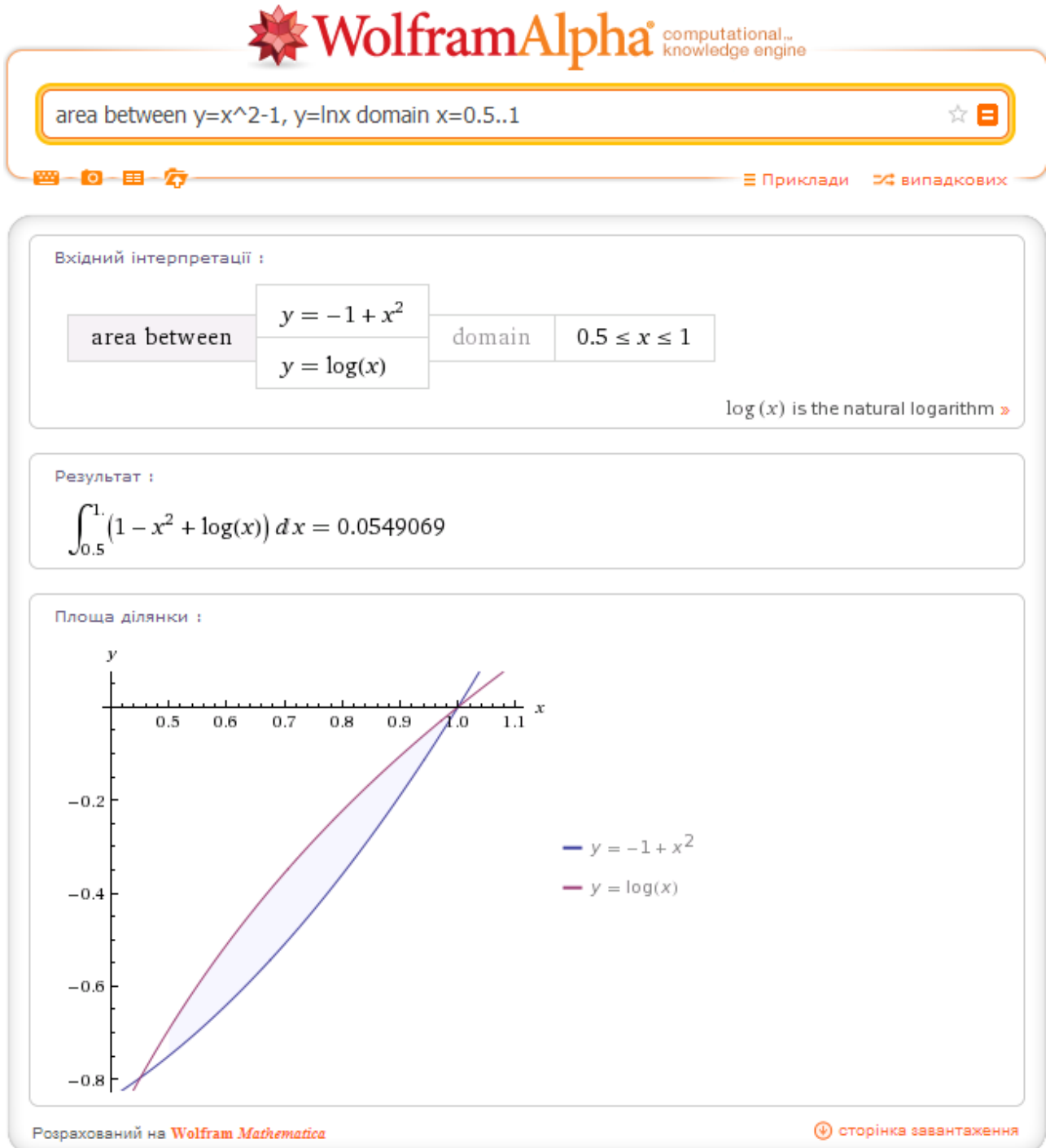


Рис. 2.30 Результат виконання

area between $y=x^2-1$, $y=\ln x$ domain $x=0.5..1$

Якщо потрібно обчислити площу, обмежену замкнутою кривою, наприклад, площа всередині еліпса, використовуйте запит **area inside:**

$$\text{area inside } x^2 - 2xy + 4y^2 - x + y = 4$$

(результат виконання Рис. 2.31)

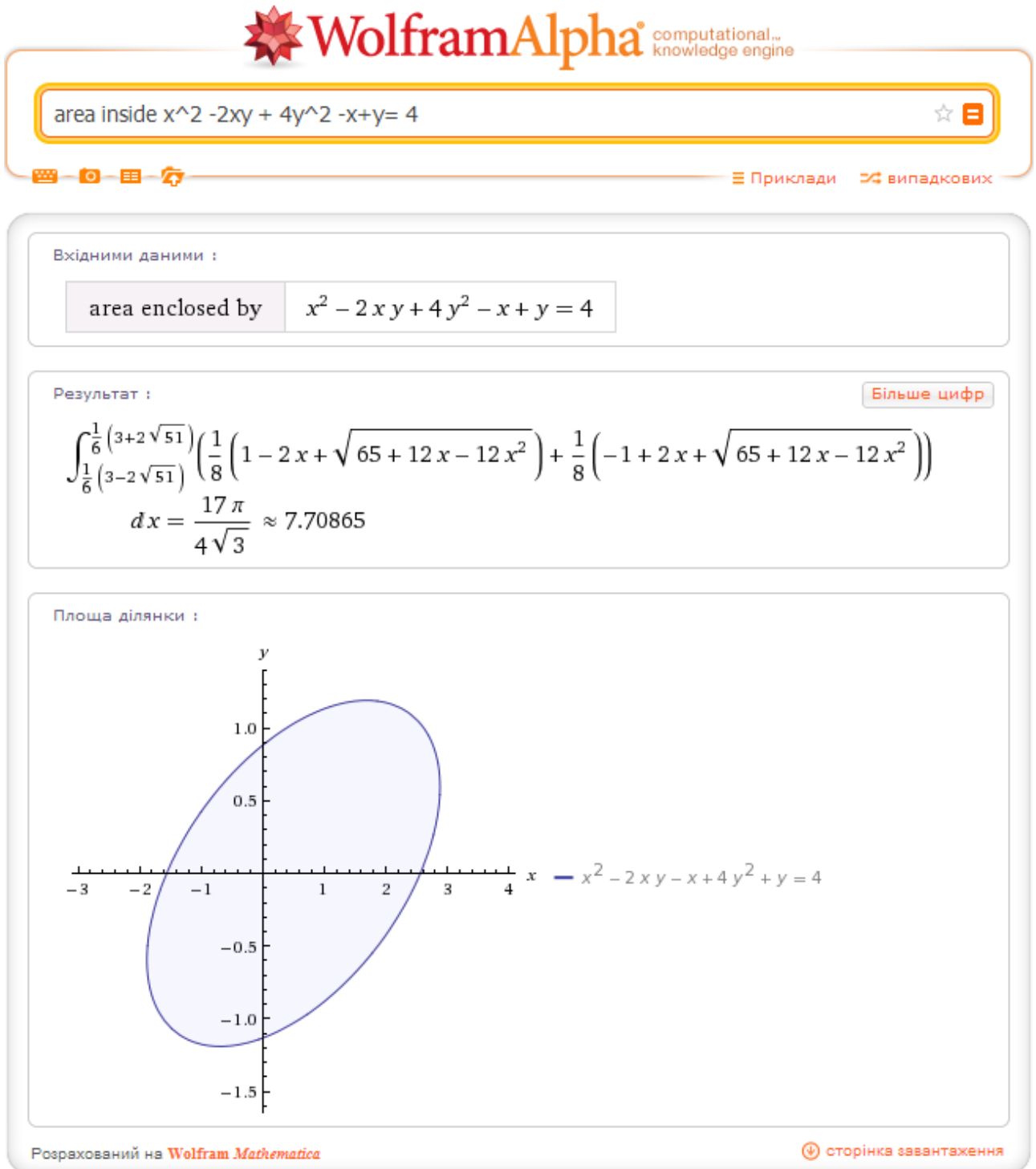


Рис. 2.31 Результат виконання
 area inside $x^2 - 2xy + 4y^2 - x + y = 4$

2.2.5 Використання сервісу «Wolfram Alpha Pro» в телефонах і смартфонах

Якщо ви є щасливим власником смартфона на базі Android 2+ ви можете скачати додаток «Wolfram Alpha» і користуватись ним там, де немає змоги використати комп'ютер.

Для цього необхідно зайти в **Play Маркеті** скачати додаток «Wolfram Alpha» (рис. 2.32).

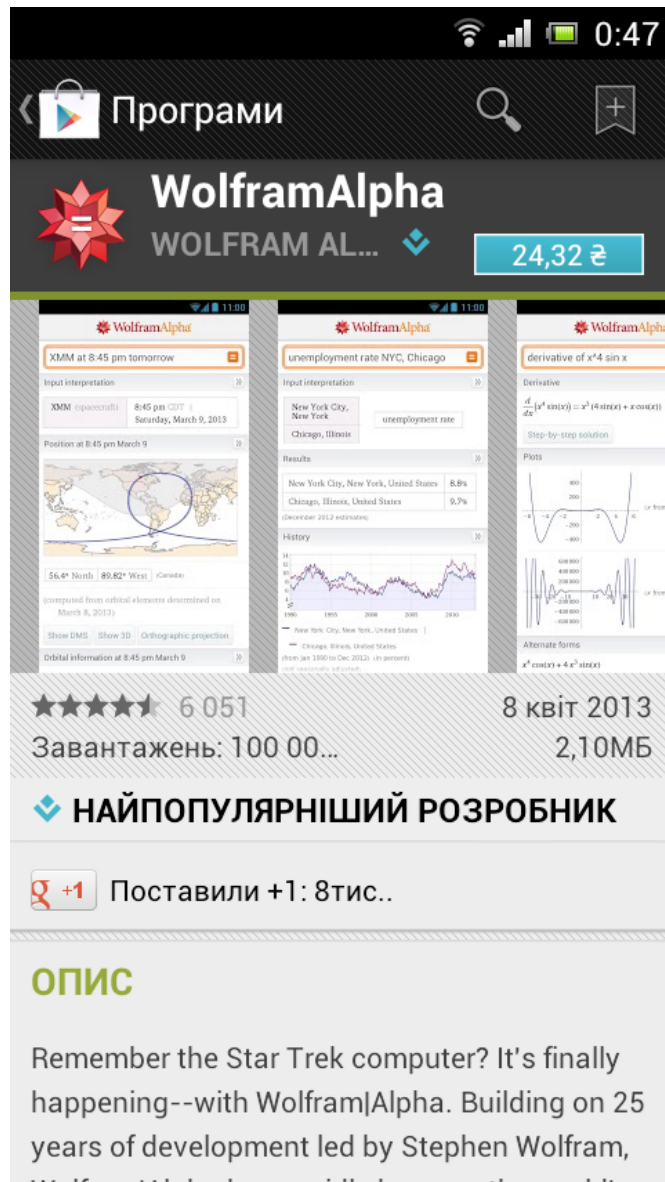


Рис. 2.32

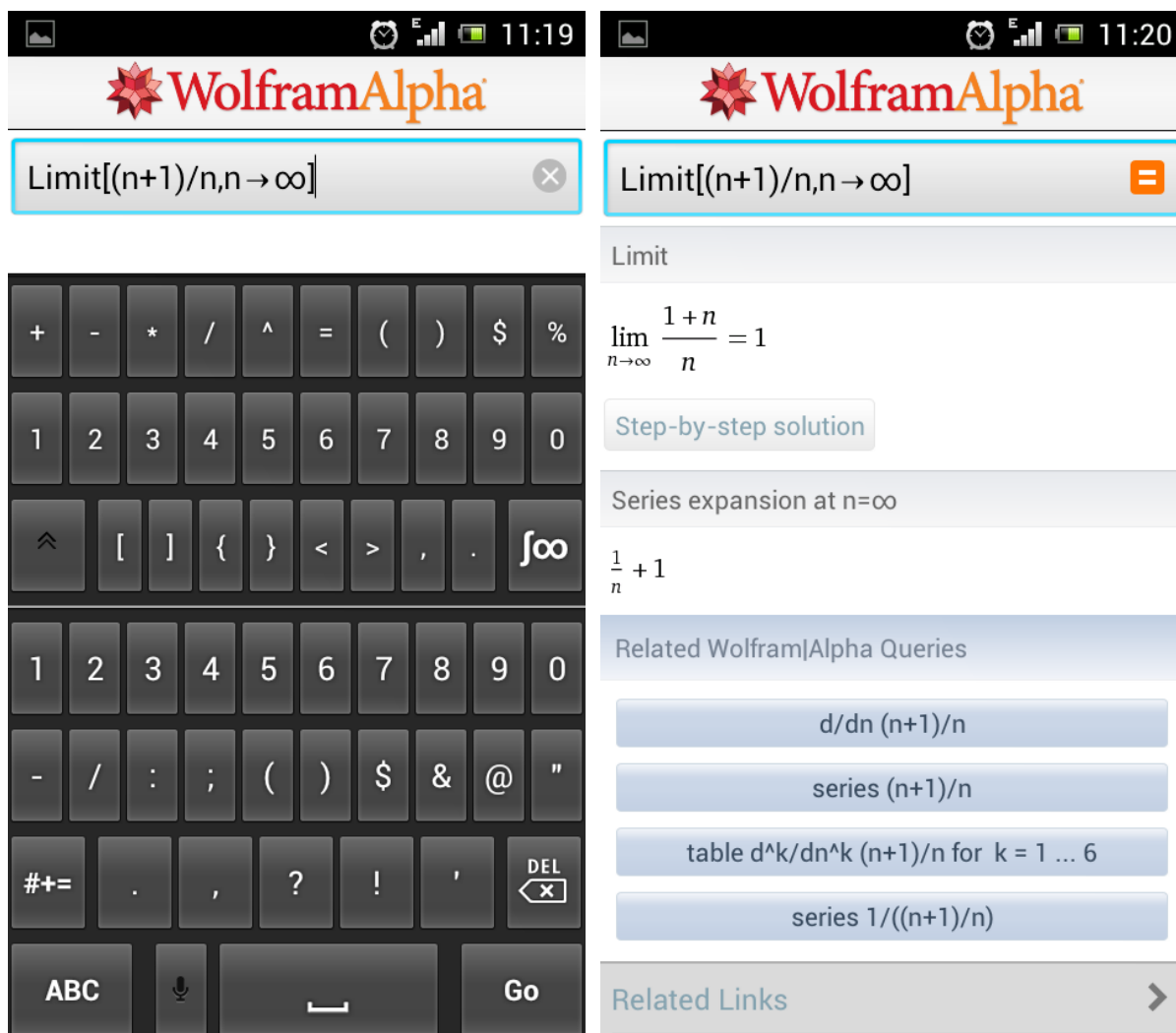


Рис. 2.33

На рис. 2.33 ми бачимо вікно додатку «Wolfram Alpha». Команди в ньому такі самі, як у сервісу.

Також ми можемо окремо скачати **apk** файл і встановити додаток «Wolfram Alpha».

Необхідно пам'ятати: для роботи додатку необхідно мати активне підключення до інтернету.

Якщо немає змоги встановити додаток або у вас звичайний телефон з традиційним доступом до інтернету, можна з телефонного браузера (можна і стандартного) зайти на сайт <http://m.wolframalpha.com/> і користуватись сервісом.

The image shows two side-by-side screenshots of the WolframAlpha mobile website. The left screenshot, taken at 19:25, shows the mobile browser address bar with 'm.wolframalpha.com' and the WolframAlpha logo with the tagline 'computational knowledge engine'. Below the logo are navigation links: 'Browse Examples »', 'New to Wolfram|Alpha »', and 'About Wolfram|Alpha »'. There are also two buttons to 'Get the Wolfram|Alpha App »' on the Amazon Appstore and the Android Market, and a link to 'View Wolfram|Alpha in:'.

The right screenshot, taken at 19:30, shows the search interface. The search bar contains the input 'int x sin (x)'. Below the search bar, the text 'Indefinite integral:' is followed by the mathematical result: $\int x \sin(x) dx = \sin(x) - x \cos(x) + \text{constant}$. Below this, the text 'Plots of the integral:' is followed by two plots. The first plot shows the function $\sin(x) - x \cos(x)$ for x from -6 to 6, with the y-axis ranging from -6 to 6. The second plot shows the same function for x from -30 to 30, with the y-axis ranging from -30 to 30.

Рис. 2.34

Як ми бачимо, сервіс працює зі стандартного браузера (рис. 2.34). Для стабільної роботи і додаткових можливостей краще все ж користуватися додатком.

РОЗДІЛ 3

ВИКОРИСТАННЯ СЕРВІСУ «WOLFRAM ALPHA PRO»

3.1. Порівняння обчислення Студентом, програмою Wolfram Mathematica 9.0 і сервісом «Wolfram Alpha Pro»

3.1.1. Ряди

Перед нами стоїть завдання знайти суму ряду:

№ 2552

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$$

Вирішує студент

Спочатку запишемо значення для перших членів ряду.

$$n=1 \quad \sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1$$

$$n=2 \quad \sqrt{4} - 2\sqrt{3} + 2$$

$$n=3 \quad \sqrt{5} - 2\sqrt{4} + 3$$

$$n=4 \quad \sqrt{6} - 2\sqrt{5} + 4$$

$$n=5 \quad \sqrt{7} - 2\sqrt{6} + 5$$

.....

.....

$$\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1}$$

$$\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$$

Ми побачили закономірність і запишемо S_n .

$$S_n = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$$

Знайдемо границю загального члена і будемо мати суму ряду.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \right) = 1 - \sqrt{2}$$

Відповідь студента: $1 - \sqrt{2}$.

Обчислює **Wolfram Mathematica 9.0**

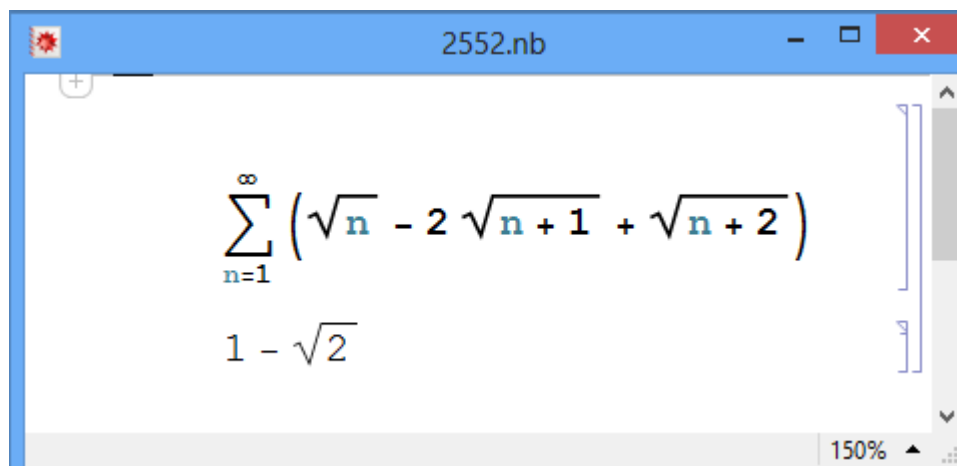


Рис. 3.1 Виконання завдання № 2552

в **Wolfram Mathematica 9.0**

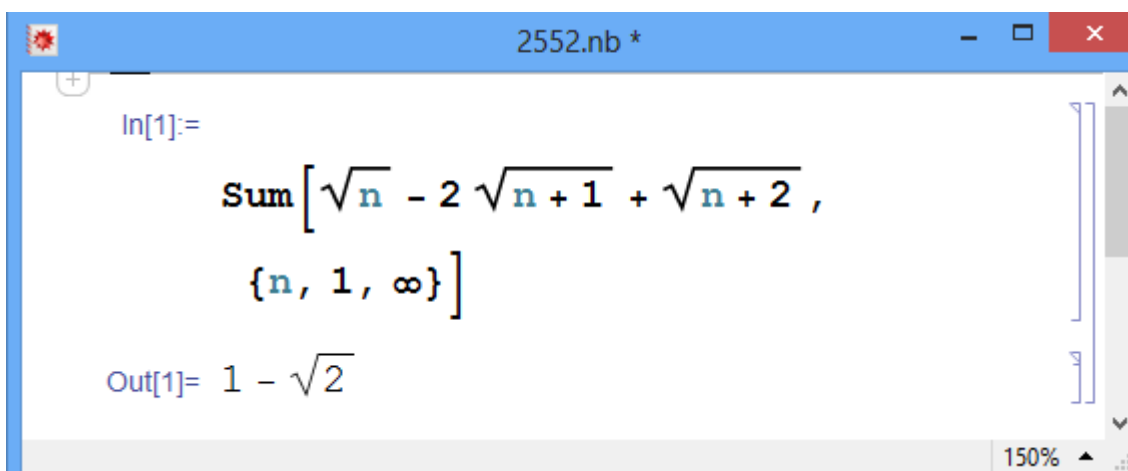



Рис. 3.2 Виконання завдання № 2552 за допомогою команди

в **Wolfram Mathematica 9.0**

Як ми бачимо на рис. 3.1 і 3.2 в обох випадках програма видала однаковий результат $1 - \sqrt{2}$.

Відповідь програми: $1 - \sqrt{2}$.

А зараз виконаємо це саме завдання сервісом «Wolfram Alpha Pro»

 **WolframAlpha** | PRO

Sum [$\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}$, $n=1$ to ∞]

Нескінченну суму :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \sqrt{n}) = 1 - \sqrt{2}$$

Десяткові наближення : Більше цифр

-0.41421356237309504880168872420969807856967187537694807317667...

Ознаки збіжності :

The ratio test is inconclusive.

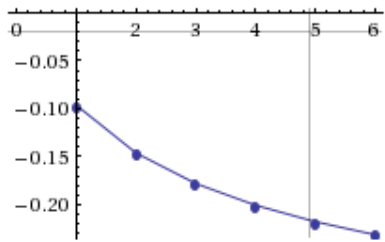
By the comparison test, the series converges.

Сума часткової формули :

$$\sum_{n=1}^m (\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}) = H_m^{(-\frac{1}{2})} - 2H_{m+1}^{(-\frac{1}{2})} + H_{m+2}^{(-\frac{1}{2})} - \sqrt{2} + 1$$

$H_n^{(r)}$ is the generalized harmonic number »

Приватні суми : Більше Правил Показати



Розрахований на **Wolfram Mathematica** сторінка завантаження

Рис. 3.3 Виконання завдання № 2552
сервісом «Wolfram Alpha Pro»

На рис. 3.3 ми бачимо той самий результат $-1 - \sqrt{2}$, хоча для його отримання довелося скористатись додатковим часом обчислень. Але, на відміну від програми, сервіс надав нам набагато більше інформації, хоча вона

для даного завдання не є необхідною. Тим не менш, на неї варто звернути увагу.

Розглянемо наступне завдання № 2708.

Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n} \right)$$

Студент обчислить так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = -2 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

Відповідь студента: .

Обчислює **Wolfram Mathematica 9.0**

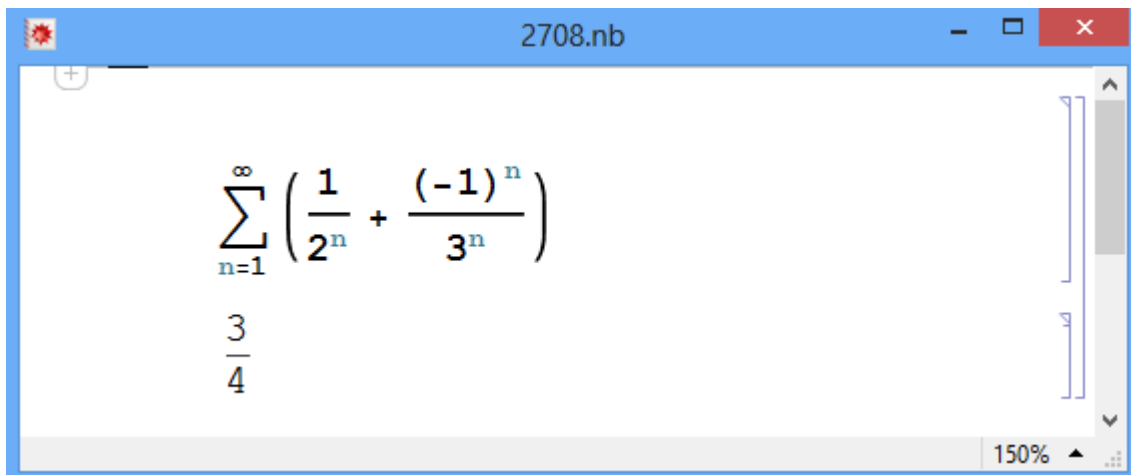


Рис. 3.4 Виконання завдання № 2708
в **Wolfram Mathematica 9.0**

Результат виконання програмою **Wolfram Mathematica 9.0** (рис. 3.4) рівний результату студента. В цьому і наступних завданнях в програмі **Wolfram Mathematica 9.0** буде продемонстровано звичне для нас представлення знаку суми, інтеграла та ін. для зручності.

Результат виконання завдання сервісом «Wolfram Alpha Pro» (рис. 3.5) такий самий як програми і студента.

Нажаль, сервіс не надає покрокового відшукування суми ряду. Ця відсутність частково компенсується додатковою інформацією.

The screenshot shows the WolframAlpha Pro interface. At the top, the search bar contains the input: $\text{Sum} [(1/(2^n)) + ((-1)^n)/(3^n), n=1 \text{ to } \infty]$. Below the search bar, the results are displayed in several sections:

- Нескінченну суму :**
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{3^n} + \frac{1}{2^n} \right) = \frac{3}{4}$$
- Ознаки збіжності :** By the ratio test, the series converges.
- Сума часткової формули :**
$$\sum_{n=1}^m \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n} \right) = 2^{-m-2} 3^{-m} ((-2)^m - 4 \times 3^m + 2^m 3^{m+1})$$
- Приватні суми :** A line graph showing the partial sums for $n=1$ to $n=6$. The x-axis is labeled from 0 to 6, and the y-axis from 0.1 to 0.7. The points are approximately (1, 0.15), (2, 0.52), (3, 0.61), (4, 0.68), (5, 0.71), and (6, 0.73). There are buttons for "Більше Правил" and "Показати".

At the bottom left, it says "Розрахований на Wolfram Mathematica". At the bottom right, there is a "сторінка завантаження" button.

Рис. 3.5 Виконання завдання № 2708
сервісом «Wolfram Alpha Pro»

3.1.2. Інтеграли

Порівняємо результати обчислення інтегралів. Спочатку виконаємо просте завдання:

Знайти невизначений інтеграл

$$\int \ln(4x^2 + 1) dx.$$

Студент виконає так:

$$\begin{aligned} \int \ln(4x^2 + 1) dx &= \left. \begin{array}{l} u = \ln(4x^2 + 1) \quad dv = dx \\ du = \frac{8x}{4x^2 + 1} \quad v = x \end{array} \right| = x \ln(4x^2 + 1) - 8 \int \frac{x^2}{4x^2 + 1} dx = \\ &= x \ln(4x^2 + 1) - 2 \int \left(1 - \frac{1}{4x^2 + 1} \right) dx = x \ln(4x^2 + 1) - 2 \left(x - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2x \right) + C = \\ &= x \ln(4x^2 + 1) + \operatorname{arctg} 2x - 2x + C. \end{aligned}$$

Програма виконала це завдання дуже швидко (Рис. 3.6).

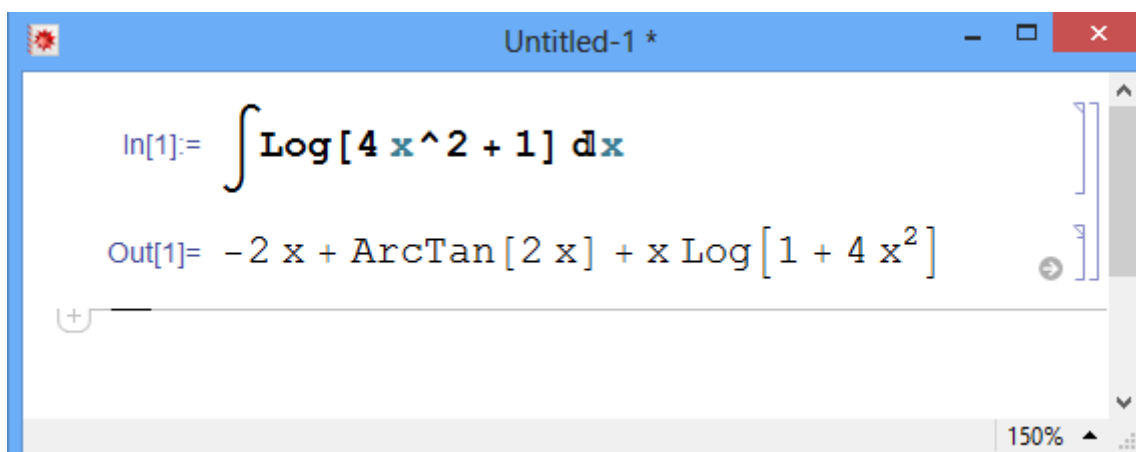


Рис. 3.6 Виконання завдання в **Wolfram Mathematica 9.0**

Результат виконання завдання сервісом «Wolfram Alpha Pro» (рис. 3.7) такий самий як програми і студента, але в компактнішому вигляді.

WolframAlpha | PRO

int Ln(4x²+1)

Невизначений інтеграл :

Крок за кроком, рішення

$$\int \log(4x^2 + 1) dx = x(\log(4x^2 + 1) - 2) + \tan^{-1}(2x) + \text{constant}$$

log(x) is the natural logarithm »
tan⁻¹(x) is the inverse tangent function »

Рис. 3.7 Виконання завдання
сервісом «Wolfram Alpha Pro»

На рис. 3.7 не вся інформація, яку надає нам сервіс. Нас цікавитиме покрокове виконання (Рис. 3.8 і 3.9).

Wolfram|Alpha Step-by-step Solution

Невизначений інтеграл :

Take the integral:
 $\int \log(1 + 4x^2) dx$

For the integrand $\log(1 + 4x^2)$, integrate by parts, $\int f dg = fg - \int g df$, where
 $f = \log(1 + 4x^2)$, $dg = dx$,
 $df = \frac{8x}{1 + 4x^2} dx$, $g = x$:
 $= - \int \frac{8x^2}{1 + 4x^2} dx + x \log(1 + 4x^2)$

Factor out constants:
 $= -8 \int \frac{x^2}{1 + 4x^2} dx + x \log(1 + 4x^2)$

Рис. 3.8 Виконання завдання сервісом «Wolfram Alpha Pro»

For the integrand $\frac{x^2}{1+4x^2}$, do long division:

$$= -8 \int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4(1+4x^2)} \right) dx + x \log(1+4x^2)$$

Integrate the sum term by term and factor out constants:

$$= -2 \int 1 dx + 2 \int \frac{1}{1+4x^2} dx + x \log(1+4x^2)$$

For the integrand $\frac{1}{1+4x^2}$, substitute $u = 2x$ and $du = 2 dx$:

$$= \int \frac{1}{1+u^2} du - 2 \int 1 dx + x \log(1+4x^2)$$

The integral of $\frac{1}{1+u^2}$ is $\tan^{-1}(u)$:

$$= \tan^{-1}(u) - 2 \int 1 dx + x \log(1+4x^2)$$

The integral of 1 is x :

$$= -2x + \tan^{-1}(u) + x \log(1+4x^2) + \text{constant}$$

Substitute back for $u = 2x$:

$$= -2x + \tan^{-1}(2x) + x \log(1+4x^2) + \text{constant}$$

Which is equal to:

Answer:

$$= \tan^{-1}(2x) + x(-2 + \log(1+4x^2)) + \text{constant}$$



Рис. 3.9 Виконання завдання
сервісом «Wolfram Alpha Pro»

Результат просто вражає. Деякі роз'яснення зайві для студента, але для самостійної підготовки чи вивчення теми вони будуть дуже корисні.

Розглянемо визначений інтеграл.

Обчислити визначений інтеграл

$$\int_{-2}^0 (x^2 - 4) \cos 3x dx$$

Результат студента цілком передбачуваний:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 (x^2 - 4) \cos 3x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2 - 4 \quad dv = \cos 3x dx \\ du = 2x dx \quad v = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right| = \frac{1}{3} (x^2 - 4) \sin 3x \Big|_{-2}^0 - \\ & - \frac{2}{3} \int_{-2}^0 x \sin 3x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad dv = \sin 3x dx \\ du = dx \quad v = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right| = -\frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3} x \cos 3x \Big|_{-2}^0 + \frac{1}{3} \int_{-2}^0 \cos 3x dx \right) = \\ & = -\frac{2}{3} \left(-\frac{2}{3} \cos 6 + \frac{1}{9} \sin 3x \Big|_{-2}^0 \right) = \frac{4}{9} \cos 6 - \frac{2}{27} \sin 6. \end{aligned}$$

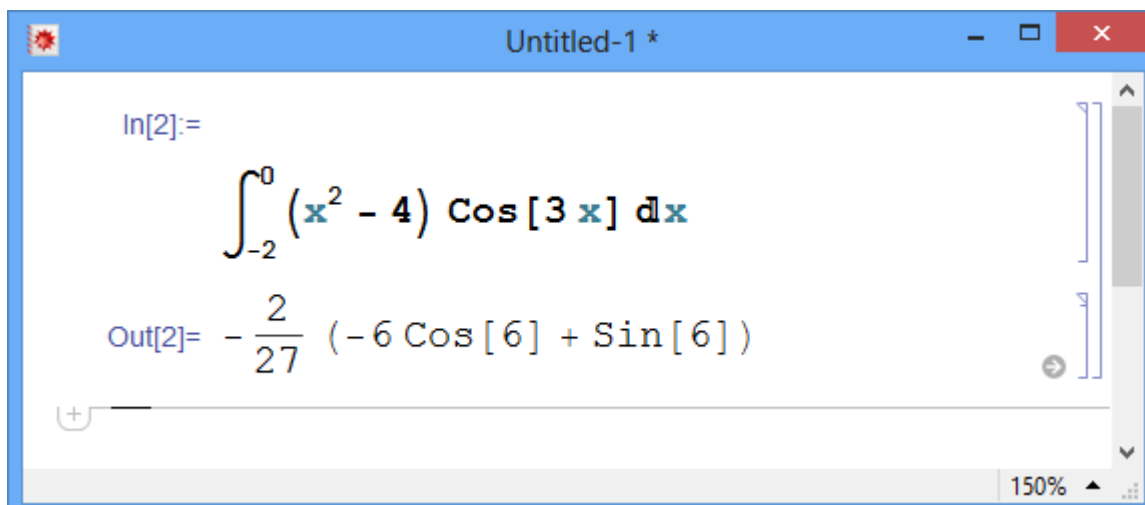



Рис. 3.10 Виконання завдання

в **Wolfram Mathematica 9.0**

Програма **Wolfram Mathematica 9.0** швидко справила з завданням (рис. 3.10).

Нас цікавить виконання сервісом цього завдання.

 **WolframAlpha** | PRO

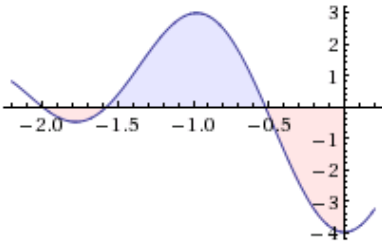
int (x^2-4) Cos (3x), x=-2..0 ☆ ☰

☰ Приклади ↔ випадкових

Певний інтеграл : Більше цифр

$$\int_{-2}^0 (x^2 - 4) \cos(3x) dx = -\frac{2}{27} (\sin(6) - 6 \cos(6)) \approx 0.44744$$

Візуальне подання інтеграла :



Суми Рімана : Більше випадків

left sum	$-\frac{(-4n^2 \sin^3(\frac{3}{n}) + (2n+1) \sin(6 - \frac{3}{n}) + (1-2n) \sin(\frac{3}{n} + 6)) \operatorname{csc}^3(\frac{3}{n})}{\left(\frac{4 \cos(6)}{9} - \frac{2 \sin(6)}{27}\right) + \frac{4}{n} + O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)}$
----------	---

csc (x) is the cosecant function »
Включити інтерактивності

Невизначений інтеграл : Зразковий вид Крок за кроком, рішення

$$\int (x^2 - 4) \cos(3x) dx = \frac{1}{27} (9x^2 - 2) \sin(3x) - \frac{4}{3} \sin(3x) + \frac{2}{9} x \cos(3x) + \text{constant}$$

Розрахований на [Wolfram Mathematica](#) ⬇️ сторінка завантаження

Рис. 3.11 Виконання завдання
сервісом «Wolfram Alpha Pro»

Сервіс дуже інформативний: точне і наближене значення інтеграла, зафарбована площа ділянки, суми Рімана та невизначений інтеграл. Ми можемо отримати покрокове відшукування невизначеного інтеграла натиснувши кнопку Крок за кроком, рішення, але ми не отримали звичного для нас способу відшукування визначеного інтеграла.

3.1.3. Границі

Для початку розглянемо простий приклад № 245.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}$$

Студент обчислить швидко. Програма теж (рис. 3.12).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1$$

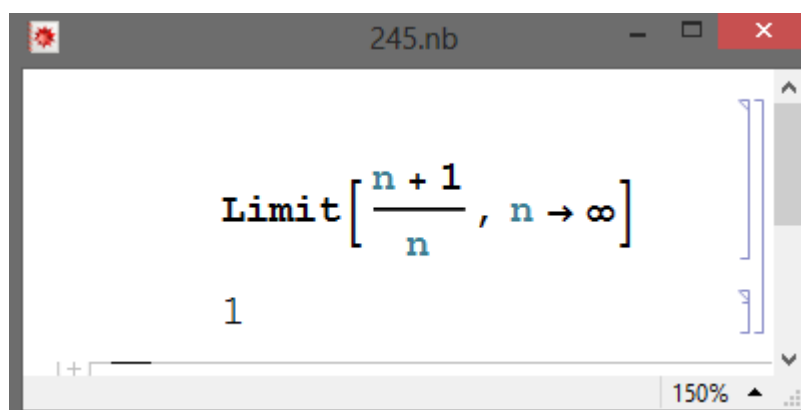


Рис. 3.12 Виконання завдання
в **Wolfram Mathematica 9.0**

A screenshot of the Wolfram Alpha Pro website. The search bar contains the input "limit (n+1)/n, n->oo". Below the search bar, the result is displayed as "Limit : lim_{n to infinity} (1+n)/n = 1". A button labeled "Крок за кроком, рішення" (Step-by-step solution) is visible. Below the main result, there is a section titled "Серія розширення при N = infinity :" showing the expansion "1/n + 1". At the bottom, it says "Розрахований на Wolfram Mathematica" and "сторінка завантаження".

Рис. 3.13 Виконання завдання сервісом «Wolfram Alpha Pro»

Сервіс обчислив границю (рис. 3.13), але іншим способом (рис. 3.14).

Wolfram|Alpha Step-by-step Solution

Limit :

Take the limit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+n}{n}$$

Indeterminate form of type ∞/∞ . Using L'Hospital's rule we have,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{d(1+n)}{dn}}{\frac{dn}{dn}} :$$

The limit of a constant is the constant:

Answer:
= 1

Download Share A

Рис. 3.14 Виконання завдання сервісом «Wolfram Alpha Pro»

Розглянемо виконання іншого завдання № 48

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin(n!)}{n+1}$$

Студент обчислить так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin(n!)}{n+1} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \sin n! \right)}{1 + \frac{1}{n}} = 0$$

Програма видала такий самий результат (рис. 3.15).

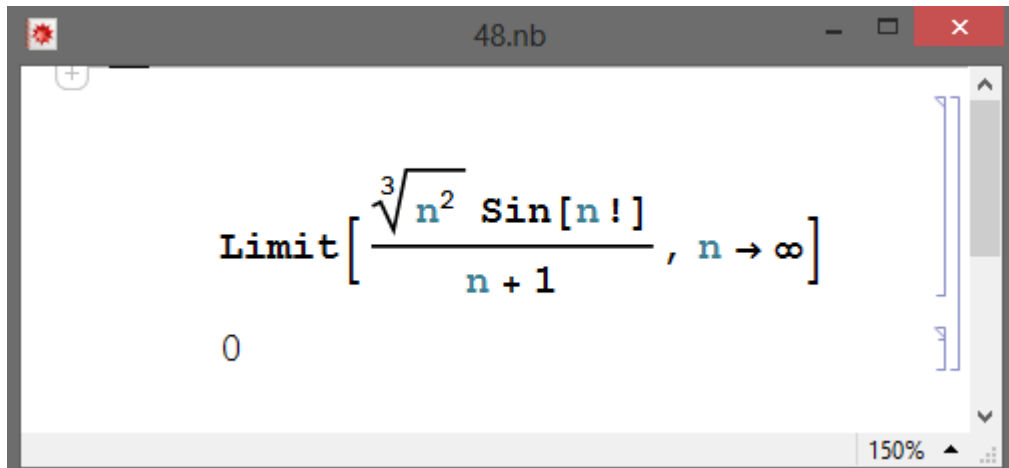


Рис. 3.15 Виконання завдання
в **Wolfram Mathematica 9.0**

The screenshot displays the WolframAlpha Pro interface. The search bar contains the input $\text{limit}((n^{(2/3)})\text{sin}(n!))/(n+1), n \rightarrow \infty$. Below the search bar, there are navigation icons and links for "Приклади" and "випадкових". A note states: "Якщо припустити, що основний корінь | Використання речових корінь замість". The main result area shows the input expression $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2/3} \sin(n!)}{n + 1}$ and the result $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2/3} \sin(n!)}{1 + n} = 0$. A "Крок за кроком, рішення" (Step-by-step solution) button is visible. A note at the bottom right says "n! is the factorial function »".

Рис. 3.16 Виконання завдання
сервісом «Wolfram Alpha Pro»

Сервіс теж виконав завдання правильно (рис. 3.16), але, на жаль, для цього завдання недоступне покрокове розв'язання (рис 3.17).



Рис. 3.17 Виконання завдання сервісом «Wolfram Alpha Pro»

Розглянемо ще приклад № 374

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\sin[2x]} - e^{\sin[x]})}{x}$$

Його розв'язання

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\sin[2x]} - e^{\sin[x]})}{x} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x} - 1}{x} - \frac{e^x - 1}{x} \right) = \\ &= 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

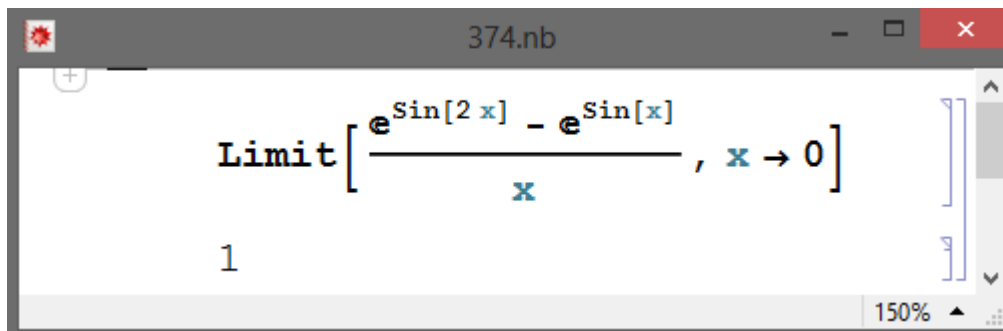



Рис. 3.18 Виконання завдання в Wolfram Mathematica 9.0

 **WolframAlpha** | PRO

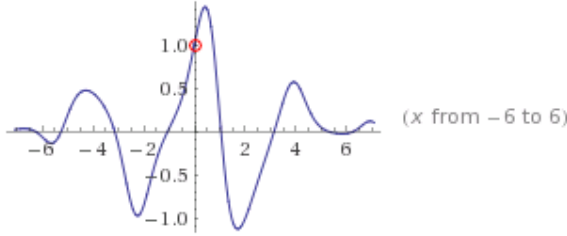
limit (e^(sin(2x))-e^(sin(x)))/x, x->0 ☆ ☰

☰ Приклади 🔄 випадкових

Limit : [Крок за кроком, рішення](#)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(2x)} - e^{\sin(x)}}{x} = 1$$

Ділянка :



(x from -6 to 6)

Розширення серії при x = 0 : [Більше Правил](#)

$$1 + \frac{3x}{2} - \frac{15x^3}{8} - \frac{31x^4}{15} - \frac{21x^5}{80} + O(x^6)$$


Розрахований на [Wolfram Mathematica](#)  сторінка завантаження

Рис. 3.19 Виконання завдання
сервісом «Wolfram Alpha Pro»

Програма і сервіс виконали завдання швидко і правильно (рис. 3.18 і 3.19), але хід виконання завдання сервісом вражає (рис.3.20 та 3.21).

Аналізуючи останній результат ми черговий раз переконуємося в недосконалості сервісу в плані раціонального чи творчого виконання завдань. Можливо в майбутньому сервіс вдосконалять і його результати обчислень будуть творчі і раціональні.

На даний час сервіс «Wolfram Alpha Pro» можна і потрібно використовувати під час вивчення математичного аналізу.

Wolfram|Alpha Step-by-step Solution

Limit :

Take the limit:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^{\sin(x)} + e^{\sin(2x)}}{x}$$

Indeterminate form of type 0/0. Applying L'Hospital's rule we have,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^{\sin(x)} + e^{\sin(2x)}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d(-e^{\sin(x)} + e^{\sin(2x)})}{dx} : \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (-e^{\sin(x)} \cos(x) + 2e^{\sin(2x)} \cos(2x)) \end{aligned}$$

The limit of a difference is the difference of the limits:

$$= -\left(\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin(x)} \cos(x)\right) + 2\left(\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin(2x)} \cos(2x)\right)$$

The limit of a product is the product of the limits:

$$= -\left(\left(\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin(x)}\right)\left(\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x)\right)\right) + 2\left(\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin(2x)} \cos(2x)\right)$$

Using the continuity of $e^{\sin(x)}$ at $x = 0$ write $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin(x)}$ as $e^{\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x)}$:

$$= -\left(e^{\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x)} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x)\right)\right) + 2\left(\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin(2x)} \cos(2x)\right)$$

The limit of $\sin(x)$ as x approaches 0 is 0:

$$= -\left(\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x)\right) + 2\left(\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin(2x)} \cos(2x)\right)$$

The limit of $\cos(x)$ as x approaches 0 is 1:

$$= -1 + 2\left(\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin(2x)} \cos(2x)\right)$$

Рис. 3.19 Виконання завдання
сервісом «Wolfram Alpha Pro»

Using the continuity of $e^{\sin(2x)}$ at $x = 0$ write $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin(2x)}$ as $e^{\lim_{x \rightarrow 0} \sin(2x)}$:

$$= -1 + 2 e^{\lim_{x \rightarrow 0} \sin(2x)} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \cos(2x) \right)$$

Using the continuity of $\sin(x)$ at $x = 0$ write $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(2x)$ as $\sin\left(\lim_{x \rightarrow 0} 2x\right)$:

$$= -1 + 2 e^{\sin\left(\lim_{x \rightarrow 0} 2x\right)} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \cos(2x) \right)$$

Factor out constants:

$$= -1 + 2 e^{\sin\left(2\left(\lim_{x \rightarrow 0} x\right)\right)} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \cos(2x) \right)$$

The limit of x as x approaches 0 is 0:

$$= -1 + 2 e^{\sin(0)} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \cos(2x) \right)$$

Using the continuity of $\cos(x)$ at $x = 0$ write $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(2x)$ as $\cos\left(\lim_{x \rightarrow 0} 2x\right)$:

$$= -1 + 2 e^{\sin(0)} \cos\left(\lim_{x \rightarrow 0} 2x\right)$$

Factor out constants:

$$= -1 + 2 e^{\sin(0)} \cos\left(2\left(\lim_{x \rightarrow 0} x\right)\right)$$

The limit of x as x approaches 0 is 0:

Answer:

$$= 1$$



Рис. 3.19 Виконання завдання
сервісом «Wolfram Alpha Pro»

3.2.Методика використання комп'ютерних технологій під час вивчення математичного аналізу.

Після ознайомлення з можливостями програми Wolfram Mathematica 9.0 та сервісом «Wolfram Alpha Pro» може скластися враження, що студенти, після ознайомлення з цими технологіями, зовсім перестануть вчитися і будуть використовувати таке благо для виконання домашніх завдань і на модульних контролях. Але, як не дивно, таке перше враження хибне. Навіть навпаки – студенти будуть краще розуміти матеріал. Спробуємо розібратись чому.

Однією з причин може стати англійськомовний інтерфейс. Не всі студенти добре володіють англійською, крім того математичними термінами. Щоб правильно зрозуміти результат, який видала програма, необхідно володіти хоча б базовими знаннями з математичного аналізу на англійській мові.

Іншою причиною стане введення в сервіс «Wolfram Alpha Pro» умови завдання, яке необхідно виконати. Щоб зробити це правильно необхідно володіти знаннями з програмування на хорошому рівні.

Сервіс надає покрокове розв'язання далеко не всіх завдань. Також варто зауважити, що з завданнями підвищеної складності він не завжди справляється, а що стосується олімпіадних чи творчих завдань, то сервіс справляється лише з деякими з них.

«Wolfram Alpha Pro» є он-лайн сервісом, тому для його роботи необхідна постійна наявність доступу до інтернету. Для виконання складних завдань швидкість з'єднання з інтернетом має бути досить високою.

Щоб користуватись сервісом треба точно пам'ятати команди, які до того ж на англійській мові.

Що стосується програми Wolfram Mathematica 9.0, то вона може виконати і дуже складні завдання, але ми не отримаємо покрокового виконання.

Після таких аргументів складається не найкраще враження про комп'ютерні технології, особливо при використанні їх в математичному аналізі. Але основним завданням програми Wolfram Mathematica 9.0 та сервісу «Wolfram Alpha Pro» була не заміна студента, а допомога йому у вивченні математичного аналізу і математики вцілому. З цим завданням продукція компанії **Wolfram** справляється дуже добре.

Використовувати комп'ютерні технології у сучасному світі необхідно. Коли студент працює з Wolfram Mathematica 9.0 та «Wolfram Alpha Pro» покращує свої знання не тільки з математичного аналізу, а й з програмування. Також студент навчиться використовувати здобуті знання в повсякденному житті.

ВИСНОВКИ

Розглядаючи програму навчальної дисципліни «Математичний аналіз» ми побачили, що дана дисципліна дуже широка і складна, вона охоплює великий об'єм матеріалу. Тому, приблизно 1/3 всіх годин відводиться на самостійну роботу студентів. Використання СКМ у самостійній роботі студентів при вивченні мат. аналізу дає змогу поєднати високі обчислювальні можливості з перевагами графічного подання інформації.

При розгляді сучасних СКМ прийшли до висновку, що на сьогоднішній день існує дуже велике різноманіття цих систем на будь-який смак. Починаючи від малих систем для шкільної освіти Derive і MuPAD, продовжуючи універсальними системами «для всіх» класу Mathcad і закінчуючи гігантами комп'ютерної алгебри – системами Mathematica та Maple. Особливе місце займає елітна матрична система MATLAB з пакетами її розширення. Всі ці системи широко використовуються на Заході, а останнім часом і у нас, у практиці шкільного, вузівського і університетської освіти.

Після розгляду теоретичних відомостей про систему Mathematica можна зробити висновок, що багаті чисельні символічні можливості цієї системи, потужні графічні можливості (включаючи анімацію), вбудована мова програмування, велика довідкова система і зручні засоби побудови гіпертекстових зв'язків між документами роблять цю систему привабливою як для дослідницької та практичної діяльності, так і для навчання студентів.

Так як система Wolfram Mathematica дозволяє вирішувати широкий спектр завдань, то було продемонстровано лише основну частину можливостей цієї системи при вивченні математичного аналізу.

Підбиваючи підсумки всієї роботи, можна сказати, що сучасні СКМ слід розглядати не тільки як електронні довідники нового покоління, але і як системи для самонавчання та дистанційного навчання математики. Однак для цього вони повинні бути забезпечені грамотно складеними (насамперед у методичному відношенні) електронними уроками або книгами. У той же час, при відсутності таких уроків застосування математичних систем може мати негативні наслідки для освіти – небезпечна підміна навчання основам математики навчанням основам роботи з математичними системами.

Однак, працювати з сучасними СКМ просто, приємно і повчально. Завдяки цьому освоєння системи Mathematica приймається учнями та студентами з великим інтересом, що служить спонукальним мотивом до їх впровадження в систему освіти, причому не тільки вищої, а й середньої.

Під час вивчення сервісу «Wolfram Alpha Pro» я користувався матеріалами 2012 року, але вони виявилися застарілими, що говорить про постійне вдосконалення сервісу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа/ – М. : «Наука», 1985. –384 с.
2. Виговський Л.С. Введення в Wolfram Mathematica. – Стаття – [Електронний ресурс] // Режим доступу:
<http://www.exponenta.ru/educat/news/vygovskiy/vygovskiy.asp>
3. Використання можливостей системи Wolfram Mathematica при вивченні математичного аналізу [Електронний ресурс] // Режим доступу:
<http://knowledge.allbest.ru/mathematics/2c0b65635b3ac78a5d53a88521206c37.html>
4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу 13-е изд, исп. –М.:Изд-во Моск. Ун-та, ЧеРо 1997.– 624 с.
5. Дьяконов В. П. Комп'ютерні математичні системи в освіті. Інформаційні технології / – М.: «Пітер», 1997. –40 с.
6. Дьяконов В. П. Комп'ютерна математика. Теорія і практика – М.: «Пітер», 2001. –1296 с.
7. Дьяконов В. П. Системи комп'ютерної алгебри Derive. – М.: «Пітер», 2002. –374 с.
8. Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках математики. – Посібник для вчителів – Київ: Техніка, 1997. –303 с.
9. Електронний підручник з Wolfram Mathematica[Електронний ресурс] // Режим доступу:
<http://lib.qrz.ru/book/export/html/10482>
10. Половко О.М. Mathematica для студента – СПб.: «БХВ-Петербург», 2007. – 368 с.

11. Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике: Учеб. пособие для вузов.—М.: Высш. школа, 1983.—175 с.
12. Рубцов М.О. Математичний аналіз. – Програма навчальної дисципліни для студентів спеціальності «Інформатика». – МДПУ, 2008. - 13с.
13. Семенов С.П., Славський В.В., Татаринцев П.Б.. Системи комп'ютерної математики. Навчальний посібник для студентів математичного факультету АМУ. – Барнаул: Алт. ун-ту, 2004 . – 128 с.
14. Слепкань З.І. Наукові зсади педагогічного процесу у вищій школі. – Навчальний посібник. – К.: Вища шк., 2005. –239 с.
15. Морзеєв Ю.М. Сучасні системи комп'ютерної математики. – Стаття – [Електронний ресурс] // Режим доступу: <http://www.compress.ru/article.aspx?id=12530&iid=474#begin>, 2001.
16. Житніков В. Г. Комп'ютери, математика і свобода. – Стаття – [Електронний ресурс] // Режим доступу: <http://www.computerra.ru/gid/266002/2006>.
17. Флегантов Л. Как найти площадь плоской фигуры в Wolfram|Alpha[Електронний ресурс] // Режим доступу: http://wolframalpha.ru.blogspot.com/2012/04/wolframalpha_23.html
18. Флегантов Л. Калькулятор интегралов в Wolfram Alpha[Електронний ресурс] // Режим доступу: <http://wolframalpha.ru.blogspot.com/2012/01/wolframalpha.html>
19. Флегантов Л. Как найти площадь фигуры ограниченной кривыми линиями[Електронний ресурс] // Режим доступу: <http://wolframalpha.ru.blogspot.com/2012/06/blog-post.html>

ДОДАТКИ

Щоб зареєструватися в про версії потрібно перейти на за адресою <http://www.wolframalpha.com/pro/> і натиснути на кнопку «Перша Безкоштовний Pro Trial» і слідувати інструкціям.

WolframAlpha[®] | PRO

Limited time offer

Отримай 3 місяці безкоштовно з річною передплатою. (Пропозиція діє до 14 серпня 2013.)

Підписатися на Pro

**Перша
Безкоштовний Pro
Trial**

Щомісячна передплата: \$ 4.99/month (\$ 2.99/students)

[Освітні / сайту ціноутворення](#) » [Часті питання](#) »  [подарункову підписку](#) »

Start a free 14-day trial of Wolfram|Alpha Pro

Create a Wolfram ID

Already have a Wolfram ID? [Sign in »](#)

Your email address (this will be your Wolfram ID)

First name

Last name

Password (at least six characters)

Confirm password

[Create Account](#)

*Get all the features of
Wolfram|Alpha Pro!*



Go beyond text input

Images, data files,
symbols...



Get richer results

Unlimited Step-by-step solutions,
dynamic interactivity, zoomability,
longer computations...



Customize and download

Customize and download
images, export raw data...

[Learn more »](#)

Почати безкоштовну 14-денну пробну версію Wolfram|Alpha Pro

Create a Wolfram ID

Already have a Wolfram ID? [Sign in »](#)

Your email address (this will be your Wolfram ID)

First name

Last name

Password (at least six characters)

Confirm password

[Create Account](#)

By clicking Create Account, you are agreeing to the [Terms of Use](#) and [Privacy Policy](#).

Get all the features of
Wolfram|Alpha Pro!



**Більше, ніж введення
тексту**

зображення, файли даних,
символи ...



**Результати стають
багатшими**

Необмежена Крок за кроком
рішення,

динамічну інтерактивність,
Налаштуйте і завантажте
зображення, експорт



більше обчислень ...
необроблених даних ...

Детальніше »

Письмо [↑](#) [←](#) [↑](#) [↓](#)

Директ Жалюзи в Києве и области быстро Горизонтальные от 60гр. Вертикальные от 75гр. Рулонные от150гр. От произв.

[Ответить](#) [Ответить всем](#) [Переслать](#) [Удалить](#) [Это спам](#) [▼](#) [Переместить](#) [▼](#) [Пометить](#) [▼](#) [Ещё](#)

Wolfram Alpha Pro email verification

От кого: **The Wolfram|Alpha Team** <pro@wolframalpha.com>

Кому: slobodyan_dmytro@mail.ru

Сегодня, 13:16

Hello, Slobodyan,

Thank you for signing up for the FREE 14-day trial of Wolfram|Alpha Pro.

To start your trial, please verify your email address by clicking the link below:

<http://www.wolframalpha.com/input/pro/verifytrialuser.jsp?v=e3f5bea0-a6d2-4ead-b387-ed39d9b12715>











- The Wolfram|Alpha Team

[←](#) [Быстрый ответ](#) [←](#) [Ответить всем](#) [→](#) [Переслать](#)

Ласкаво просимо, Слободян!

Ваше повідомлення було успішно перевірено.

Тепер у вас є доступ до безкоштовного 14-денного пробного версія Wolfram | Alpha Pro, включаючи такі функції:

- | | |
|---|--|
|  Введення даних |  Додатковий час обчислень |
|  Завантаження файлу |  Настроювані графіків і таблиць |
|  Введення зображень |  PDF / CDF Скачати Report |
|  Завантаження даних |  Розширений символ клавіатури |
|  CDF інтерактивності |  Необмежений доступ до Крок за кроком рішення <i>New!</i> |

... and much more >>

[Get Started Now!](#)

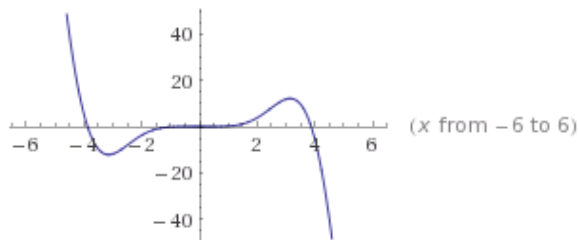
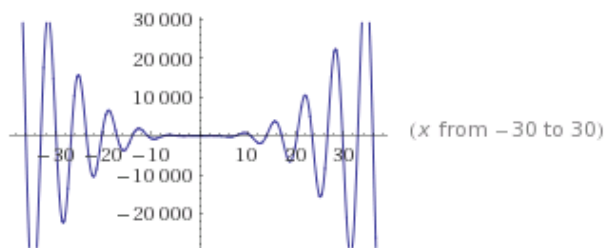

[Приклади](#) [випадкових](#)

Невизначений інтеграл :

[Крок за кроком, рішення](#)

$$\int x^3 \sin(x) dx = 3(x^2 - 2) \sin(x) - x(x^2 - 6) \cos(x) + \text{constant}$$

Земельні інтеграл :


[Включити інтерактивності](#)

[Включити інтерактивності](#)

Альтернативні форми інтеграла :

$$x^3 (-\cos(x)) + 3x^2 \sin(x) - 6 \sin(x) + 6x \cos(x) + \text{constant}$$

$$(6x - x^3) \cos(x) + (3x^2 - 6) \sin(x) + \text{constant}$$

$$\frac{3}{2} i (e^{-ix} - e^{ix}) (x^2 - 2) - \frac{1}{2} (e^{-ix} + e^{ix}) x (x^2 - 6) + \text{constant}$$

Серія розкладання інтеграла при $x = 0$:

$$\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{1080} + O(x^{10})$$

Певний інтеграл :

[Більше цифр](#)

$$\int_0^{\pi} x^3 \sin(x) dx = \pi(\pi^2 - 6) \approx 12.1567$$

Wolfram|Alpha Step-by-step Solution

Невизначений інтеграл :

Take the integral:

$$\int x^3 \sin(x) dx$$

For the integrand $x^3 \sin(x)$, integrate by parts, $\int f dg = fg - \int g df$, where
 $f = x^3$, $dg = \sin(x) dx$,

For the integrand $x^2 \cos(x)$, integrate by parts, $\int f dg = fg - \int g df$, where
 $f = x^2$, $dg = \cos(x) dx$,
 $df = 2x dx$, $g = \sin(x)$:

$$= x^3 (-\cos(x)) + 3x^2 \sin(x) - 6 \int x \sin(x) dx$$

For the integrand $x \sin(x)$, integrate by parts, $\int f dg = fg - \int g df$, where

$f = x$, $dg = \sin(x) dx$,
 $df = dx$, $g = -\cos(x)$:

$$= x^3 (-\cos(x)) + 3x^2 \sin(x) + 6x \cos(x) - 6 \int \cos(x) dx$$

The integral of $\cos(x)$ is $\sin(x)$:

$$= x^3 (-\cos(x)) + 3x^2 \sin(x) - 6 \sin(x) + 6x \cos(x) + \text{constant}$$

Which is equal to:

Answer:

$$= 3(x^2 - 2) \sin(x) - x(x^2 - 6) \cos(x) + \text{constant}$$

АНОТАЦІЯ

Слободян Д. Я. Використання комп'ютерних технологій під час вивчення математичного аналізу: дипломна робота/ Слободян Дмитро Ярославович; ТНПУ ім. Володимира Гнатюка, фізико-математичний факультет, кафедра математичного аналізу; наук. кер. Громяк М. І.— Тернопіль, 2013. — 75 с.

Робота присвячена огляду та демонстрації можливостей системи Wolfram Mathematica та сервісу Wolfram Alpha Pro і методиці їх використання при вивченні математичного аналізу. У роботі розглянуто кілька тем з математичного аналізу, продемонстровано розв'язки конкретних завдань з цих тем в програмі Wolfram Mathematica та сервісі Wolfram Alpha Pro.

Ключові слова: Wolfram Mathematica, Wolfram Alpha Pro, комп'ютерні математичні системи.