Тернопільськийнаціональнийпедагогічнийуніверситет

іменіВолодимира Гнатюка

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу

Магістерська робота

з математичного аналізу

на тему: «Узагальнені методи Чезаро та Пуассона-Абеля підсумовування рядів та послідовностей»

Магістрантки групи мМ

спеціальності 8.04020101. Математика

Пелехатої Ольги Богданівни

Керівник: Лотоцький В.А., кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рецензент:Габрусєв Г.В., кандидат фізико-математичних наук, доцент

Національна шкала
____

Кількість балів: ______Оцінка: ECTS ____

Тернопіль - 2013 року

ЗМІСТ

ВСТУП 3

РОЗДІЛ 1. КЛАСИЧНІ МЕТОДИ ЧЕЗАРО ТА ПУАССОНА-АБЕЛЯ ПІДСУМОВУВАННЯ РЯДІВ ТА ПОСЛІДОВНОСТЕЙ 6

1.1. Регулярні методи підсумовування рядів і послідовностей. Матричні перетворення. Критерій регулярності методу підсумовування 6

1.2. Метод середніх арифметичних 8

1.3. Застосування регулярних методів підсумовування рядів та послідовностей 9

РОЗДІЛ 2. УЗАГАЛЬНЕНІ МЕТОДИ ПІДСУМОВУВАННЯ ЧЕЗАРО ТА ПУАССОНА-АБЕЛЯ, СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ НИМИ .. 17

2.1. Узагальнені методи Чезаро 17

2.2. Узагальнені методи Пуассона-Абеля, співвідношення між ними. Взаємозв'язки між узагальненими середніми Чезаро та Пуассона-Абеля 26

ВИСНОВКИ 32

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 33

ДОДАТКИ 34

ВСТУП

Наша робота присвячена тому розділусучасної математики, де вирішуються проблеми збіжності рядів і послідовностей. Відомо, що поряд із класичними традиційними означеннями збіжності послідовності чи ряду є ще інші способи, якими теж означається, що розуміти під сумою ряду чи границею послідовності. Суми і границі, одержані таким способом, називають узагальненими, причому найбільш цікавимиє способи, які у випадку збіжної послідовності чи ряду дають узагальнені границі і суми, що співпадають із тими, що одержуються в класичному розумінні. Такі методи називають регулярними. В своїй роботі ми вивчаємо такі регулярні перетворення, які свого часу ввели в математичну науку Чезаро, Пуассон і Абель, а дещо пізніше, а саме в 60-их роках минулого століття, американський математик Борвейн узагальнив їх так, що класичні методи Чезаро і Пуассона-Абеля є частковими випадками для побудованих. Такий інтерес до цих методів викликаний тим, що вони дуже часто і ефективно використовуються, наприклад, в теорії рядів Фур'є.

У першому розділі магістерської роботи вивчаються деякі часткові випадки регулярних перетворень послідовностей, зокрема, метод середніх арифметичних, згадані вище класичні методи Чезаро та напівнеперервний метод Пуассона-Абеля. Зауважимо, що метод середніх арифметичних є одним із методів Чезаро і одержується з них, якщо параметр перетворенняЧезаро дорівнюватиме одиниці. Цей метод є одним із найпростіших і вже використовується в теорії рядів Фур'є, зокрема в теоремі Фейєра.У цьому розділі означаються всі наведені вище методи, приводяться твердження, з допомогою яких встановлюються взаємозв'язки між методами Чезаро, а також ними і методомПуассона-Абеля.

У другому розділі роботи вивчаються узагальнені методи Чезаро та Пуассона-Абеля, які введені Борвейном. Зокрема, доведено твердження, яке встановлює співвідношення між такими перетвореннями Чезаро різних порядків по першому параметру. Також у цьому розділі значна увага приділена узагальненим методам Пуассона-Абеля. Для них доведені відповідні твердження, які дозволяють встановити взаємозв'язки між узагальненими середніми Пуассона-Абеля різних порядків і стверджувати, що їх сила зростає із зменшенням параметра. Як і для класичних перетворень Чезаро і Пуассона-Абеля, для узагальнених середніх Чезаро і Пуассона-Абеля теж встановлюється аналогічне співвідношення, тобто із того, що ряд або послідовність підсумовується узагальненим методом Чезаро порядку (α, β), випливає те, що він підсумовується і узагальненим методом Пуассона-Абеля порядку β (до речі, якщо$\beta = 0$, то із останнього співвідношення випливає таке ж для класичного випадку).

Далі, в роботі ми приводимо багато різних конкретних прикладів. Так, зокрема, тут є приклади рядів і послідовностей, для яких знаходимо згадані вище узагальнені суми та границі з допомогою як класичних методів Чезаро та Пуассона-Абеля, так і з допомогою тих, які введені Борвейном. Приводимо також такі послідовності, які не підсумовуються якимось з методів, що вивчаються в роботі. Твердження, які встановлюють співвідношення між класичними методами Чезаро та методом Пуассона-Абеля також підкріплене відповідною ілюстрацією. Щодо узагальнених методів Чезаро, то наведено приклад розбіжної послідовності $\{1,0,0,1,0,0,\ldots\}$, для якої аналітично і з допомогою програмного забезпечення обчислюються узагальнені границі методами $C(1,0)$, $C(1,1)$, $C(2,1)$, $C(1,2)$. В усіх випадках отримали той самий результат – послідовність підсумовується до числа $\frac{1}{3}$. Зокрема, його можна було отримати для перетворення Чезаро порядку$C(2,1)$, застосувавши той факт, що послідовність підсумовується $C(1,1)$ і твердження, доведене в роботі.

Крім того, тут ми також застосовуємо узагальнені методи Чезаро до підсумовування такого ряду

$$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^{n+1} n + \cdots,$$

послідовність часткових сум якого має вигляд

$$1; -1; 2; -2; \ldots$$

Її особливість полягає в тому, що на відміну від попередніх розглянутих нами послідовностей, вона необмежена. І тим не менше, добре відомо, що ця послідовність підсумовується методом $\mathrm{C}(2)$ (і тим більше методом Пуассона-Абеля) до числа $\frac{1}{4}$, але не підсумовується, наприклад, методом $C(1,2)$.

Ми намагались писати цю роботу доступною зрозумілою мовою так, щоб її могли читати студенти старших курсів математичних спеціальностей, які бажають глибше познайомитись з деякими проблемами підсумовування рядів та послідовностей і побачити, що збіжність ряду чи послідовності можна інтерпретувати не тільки так, як це зроблено в класичному аналізі.

РОЗДІЛ 1. КЛАСИЧНІ МЕТОДИ ЧЕЗАРО ТА ПУАССОНА-АБЕЛЯ ПІДСУМОВУВАННЯ РЯДІВ ТА ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

1.1. Регулярні методи підсумовування рядів і послідовностей. Матричні перетворення. Критерій регулярності методу підсумовування

В математичному аналізі найважливішим є поняття граничного переходу. Послідовність u_nназивається збіжною, якщо $\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon) |u_n - u| < \varepsilon$. В протилежному випадку$\{u_n\}$розбіжна. Питання збіжності послідовності – основний об'єкт дослідження теорії рядів. Ряд $\sum u_n$ називається збіжним до U, якщо його послідовність часткових сум $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$збіжна до U $(\sum u_k = U)$.Ряд називається розбіжним, якщо послідовність його часткових сум розбіжна, або не має границі.

Для сучасної теорії рядів характерно те, що вона вивчає переважно розбіжні ряди. Для них треба дати нове означення суми ряду. Якщо розбіжний ряд має суму Uза яким-небудь означенням А, то кажуть, що ряд підсумовується методом А до суми U. Найчастіше методи підсумовування визначаються наступними перетвореннями, які називають матричними. Нехай $\alpha = (a_{nk})$ - нескінченна матриця (n,k =0,1,..). Для даної послідовності $\{U_n\}$ утворимо нову послідовність $\{U_n^{'}\}$з

$U_n =$

$\sum_k a_{nk} U_k$. (A)Якщо $U_n^{'}$існують при будь-якому n=0,1,…і$\lim_{n\to\infty} U_n^{'} = U^{'}$, то кажуть, що послідовність $\{U_n\}$ підсумовується методом α до суми $U^{'}$. Перетворення (A) називають матричним перетворенням послідовності в послідовність. Поряд з перетворенням (A) застосовують і наступні матричні перетворення:

$$U_n^{'} = \sum_k \alpha_{nk} u_k. \qquad (B)$$

ряду в послідовність;

перетворення

$$u_n^{'} = \sum_k \bar{\alpha}_{nk} u_k \ \ (C)$$

ряду в ряд; перетворення

$$u_n' = \sum_k \bar{\alpha}_{nk} U_k \text{ (D)}$$

послідовності в ряд. Перетворення (А) називається трикутним, якщо $a_{nk} = 0$ при $k > n$. Аналогічно можна впевнитись в тому, що (В), (С), (D) також задаються трикутним перетворенням.

Вводячи нове означення суми рядунайчастіше його підкоряють двом умовам:

1). Якщо ряду$\sum a_n$приписується узагальнена сума А, а ряду $\sum b_n$ - узагальнена сума В, то ряд $\sum pa_n + qb_n$, де p, q - дві довільні константи, повинен мати узагальненою сумою число $pA + qB$. Метод підсумовування, який задовольняє цю вимогу, називають лінійним.

2). Нове означення повинне містити класичне як частковий випадок, тобто ряд, збіжний у класичному розумінні до числа А, повинен мати таку ж узагальнену суму. Метод підсумовування, який задовольняє цю вимогу, називають регулярним.

З усіх методів підсумовування найбільший інтерес представляють ті, для яких виконуються вище зазначені умови, зокрема такі, що зберігають збіжність і ефективні для деяких розбіжних рядів чи послідовностей. Іншими словами, нам цікавий такий метод: якщо ряд чи послідовність збіжний і має границю U, то застосувавши до нього метод підсумовування А, ми отримаємо то же ж результат, $U_n \to U, n \to \infty$, а також новий метод підсумовування деяким розбіжним послідовностям ставить у відповідність якесь число, яке ми називатимемо узагальненою границею.

У теорії підсумовування важливу роль відіграє наступна

Теорема (Тьопліц):*Для того, щоб перетворення (А) було регулярним, необхідно і достатньо виконання умов*

1) *існує* $lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$;
2) *існує* $lim_{n\to\infty} \sum_k^n a_{nk} = 1$;
3) $\sum_k |a_{nk}| = O(1)$.

Теорема Тьопліца є критерієм регулярності методу підсумовування. Нам відома [1,12] і більш загальна теорема Кожима-Шура, яка є критерієм того, що перетворення існує та зберігає збіжність:

Для того, щоб перетворення (А) існувало і зберігало збіжність, необхідно і достатньо виконання умов:

1) *існує* $lim_{n\to\infty} a_{nk} = a_k$;
2) *існує* $lim_{n\to\infty} \sum_k^n a_{nk} = a$;
3) $\sum_k |a_{nk}| = O(1)$.

При цьому, якщо $lim_{k\to\infty} U_k = U$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} U'_n = aU + \sum a_k(U_k - U) = \left(a - \sum a_k\right)U + \sum a_k U_k.$$

До таких належать зокрема методи Чезаро, Пуассона-Абеля та метод середніх арифметичних, який ми розглянемо детальніше у наступному пункті.

1.2. Метод середніх арифметичних

Одним з найвідоміших регулярних методів підсумовування є метод середніх арифметичних, про який буде іти мова далі. Як ми знаємо, ряд-добуток $\sum w_n$ двох збіжних рядів $\sum u_n$ і $\sum v_n$, обчислений за правилом Коші, де $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$, не зобов'язаний збігатися. Проте, якщо до нього застосуємо метод середніх арифметичних, то отримаємо, що число UV, де $U = \sum u_n$, $V = \sum v_n$, є узагальненою сумою ряду $\sum w_n$. Розглянемо як означається це перетворення.

Нехай маємо ряд $\sum a_n$, і $\{S_n\}$ - послідовність часткових сум цього ряду. Утворимо для неї послідовність середніх арифметичних, а саме

$$S'_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_n.$$

Якщо існує $\lim_{n\to\infty} S_n' = S$, то кажуть, що ряд $\sum a_n$ підсумовується до числа S методом середніх арифметичних.

Розглянемо приклад. Ряд

$$1\text{-}1\text{+}1\text{-}1\text{+}\dots \qquad (1)$$

розбіжний в класичному розумінні, але підсумовується означеним вище методом до числа $\frac{1}{2}$. Утворивши для послідовності його часткових сум середні арифметичні, будемо мати, що $S'_{2n} = \frac{n+1}{2n+1}$, $S'_{2n-1} = \frac{1}{2}$. А тому $\lim_{n\to\infty} S_n^{'} = \frac{1}{2}$ і число $\frac{1}{2}$ є узагальненою сумою ряду (1). Разом з тим, існують ряди, які не підсумовуються даним методом. До таких належить зокрема такий 1-2+3-4+…. Утворивши для послідовності його часткових сум середні арифметичні, побачимо, що вона розбіжна, тобто таке перетворення не є ефективним для нашого ряду.

Метод середніх арифметичних широко застосовують в теорії рядів Фур'є. Ми знаємо, що ряд Фур'є неперервної функції може бути розбіжним на нескінченній множині $E \subset (0, 2\pi)$. Разом з тим, нам і відома теорема Фейєра, яка стверджує наступне:

Якщо $f(x)$- будь-яка 2π-періодична неперервна функція, а

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

- часткові суми її ряду Фур'є, то послідовність їх середніх арифметичних

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k(x)$$

рівномірно збігається до $f(x)$на всій числовій осі.

Таким чином, ряд Фур'є будь-якої 2π-періодичної неперервної функції рівномірно підсумовується методом середніх арифметичних на всій осі.

1.3 Класичні методи Чезаро та Пуассона-Абеля

Нижче ми розглянемо групу регулярних методів, означених Чезаро, які є узагальненням методу середніх арифметичних.

Нехай маємо послідовність $\{S_n\}$і$\alpha > -1$. Покладемо

$$C_n^{(\alpha)} = \frac{1}{E_n^{(\alpha)}} \sum_{k=0}^{n} E_{n-k}^{(\alpha-1)} S_k \,, \qquad (2)$$

де $E_k^n = \binom{n+k}{k} = \frac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+1)}$, де *Γ(x)*- гамма-функція. Тоді новоутворену послідовність $\left\{C_n^{(\alpha)}\right\}$ назвемо перетворенням Чезаро порядку(α). Якщо для якоїсь послідовності $\{S_n\}$послідовність $\left\{C_n^{(\alpha)}\right\}$ має границю, що дорівнює S, то будемо говорити, що ця послідовність підсумовується до числа S методом Чезаро порядку(α). Якщо у формулі (2) покласти $\alpha = 1$, то побачимо, що даний метод стає методом середніх арифметичних.

Встановимо співвідношення між середніми Чезаро різних порядків. Виявляється, для них має місце співвідношення, виражене наступним твердженням.

Якщо $\alpha > -1$, і $\delta > 0$, то

$$C_n^{(\alpha+\delta)} = \frac{1}{E_n^{(\alpha+\delta)}} \sum\nolimits_{k=0}^{n} E_{n-k}^{(\delta-1)} E_k^{(\alpha)} \mathrm{C}_k^{(\alpha)} \;\; (n = 0,1,2 \dots),$$

де $C_n^{(\alpha)}(n = 0,1,2 \dots)$– *середні, визначені для деякої послідовності* $\{S_n\}$ *формулою (1).*

Справді, позначимо через

$$A_n^{(\alpha)} = \sum_{k=0}^{n} E_{n-k}^{(\alpha-1)} S_k (n = 0,1,2, \dots).$$

Тоді

$$C_n^{(\alpha)} = \frac{A_n^{(\alpha)}}{E_n^{(\alpha)}} \quad (n = 0,1,2, \dots)$$

і, використовуючи формули множення рядів за правилом Коші, будемо мати

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(\alpha+\delta)} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} E_{n-k}^{(\alpha+\delta-1)} S_k \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(\alpha+\delta-1)} x^n \sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k =$$

$$= \frac{1}{(1-x)^{\alpha+\delta}} \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n = \frac{1}{(1-x)^{\delta}} \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(\alpha-1)} x^n \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(\delta-1)} x^n \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(\alpha)} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} E_{n-k}^{(\delta-1)} A_k^{(\alpha)} \right) x^n.$$

Отже,

$$A_n^{(\alpha+\delta)} = \sum_{k=0}^{n} E_{n-k}^{(\delta-1)} A_k^{(\alpha)} = \sum_{k=0}^{n} E_{n-k}^{(\delta-1)} E_k^{(\alpha)} C_k^{(\alpha)} \; (n = 0,1,2,\dots).$$

Тому

$$C_n^{(\alpha+\delta)} = \frac{A_n^{(\alpha+\delta)}}{E_n^{(\alpha+\delta)}} = \frac{1}{E_n^{(\alpha+\delta)}} \sum_{k=0}^{n} E_{n-k}^{(\delta-1)} E_k^{(\alpha)} C_k^{(\alpha)}.$$

Отже, можна стверджувати, що із того, що ряд підсумовується методом $C_n^{(\alpha)}$випливає те, що він підсумовується і методом $C_n^{(\alpha+\delta)}$, тобто із зростанням параметра підсумовування сила методу не слабшає. Цей факт слідує з того, що середні $C_n^{(\alpha+\delta)}$ одержуються з середніх $C_n^{(\alpha)}$ регулярним матричним перетворенням, яке, як нам відомо, зберігає збіжність. Виявляється, є послідовності та ряди, які не підсумовуються методом (C, α), але підсумовуються $(C, \alpha + 1)$. Зокрема, відомо, що розглянутий вище ряд1-2+3-4+…, не підсумовується $(C, 1)$ (методом середніх арифметичних), однак підсумовується $(C, 2)$ і має узагальненою сумою число$\frac{1}{4}$.

З останнього співвідношення також випливає наступна властивість методів Чезаро:

(C, α) *регулярний при* $\alpha > 0$.

Слід зауважити, що метод підсумовування Чезаро ефективний не для всіх розбіжних рядів, а лише для деякого класу. Розглянемо теорему[1,94], що виражає необхідну умову того, щоб ряд підсумовувався цим методом.

Теорема 1. *Якщо ряд* $\sum a_n$ *підсумовується* (C, α) *до числа*S, *де* $\alpha > -1$, *то* $a_n = o(n^{\alpha})$.

Доведення

Для доведення теореми нам треба показати, що $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^\alpha}=0$, завжди коли існує$\lim_{n\to\infty} C_n^{(\alpha)}$. Для цього скористаємось тим, що перетворення $C_n^{(\alpha)}$оборотне, а саме

$$a_n=\sum_{k=0}^{n} E_k^\alpha E_{n-k}^{-\alpha-2}.$$

Розглянемо відношення

$$\frac{a_n}{n^\alpha}=\sum_{k=0}^{n}\frac{E_k^\alpha E_{n-k}^{-\alpha-2}}{n^\alpha}C_n^{(\alpha)}=\sum_{k=0}^{n} c_{nk}C_n^{(\alpha)}.$$

і доведемо, що$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} c_{nk}C_n^{(\alpha)}=0$за допомогою теореми Кожима-Шура. Маємо

1. $\lim\limits_{n\to\infty} c_{nk}=E_k^\alpha\lim\limits_{n\to\infty}\frac{E_{n-k}^{-\alpha-2}}{n^\alpha}=O(E_k^\alpha)\lim\limits_{n\to\infty} n^{-\alpha}(n-k)^{-\alpha-2}=0;$

2. $\sum\limits_{k=0}^{n} c_{nk}=n^{-\alpha}\sum\limits_{k=0}^{n} E_k^\alpha E_{n-k}^{-\alpha-2}=n^{-\alpha}E_n^{-1}=0;$

3. $\sum\limits_{k=0}^{n}|c_{nk}|=O(n^{-\alpha}E_n^\alpha)\sum\limits_{k=0}^{n}|E_{n-k}^{-\alpha-2}|=O(1)\sum\limits_{k=0}^{n}\left|E_{n-k}^{-\alpha-2}\right|=O(1),$

бо при $\alpha>-1$маємо $-\alpha-2<-1$. Ми вже довели, що існує $\lim_{n\to\infty}(n^{-\alpha}a_n)$,залишається показати, що вона рівний нулю. А це слідує з теореми Кожима-Шура і того, що в нашому випадку границі в умовах 1 і 2 дорівнюють нулеві.

Крім методів Чезаро є ще одне, так зване, напівнеперервне перетворення послідовності – перетворення Пуассона-Абеля. Пуассон застосовував його для рядів Фур'є. Нехай маємо послідовність $\{S_n\}$. Кажуть, що вона підсумовується методом Пуассона-Абеля, коротко А-методом до числа S, якщо степеневий ряд $\sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k$ збіжний при $|x|<1$ і

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)\sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k = \lim_{x\to 1-0}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = S, \qquad (3)$$

де$S_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_k$.

Приведемо приклади розбіжних в класичному розумінні рядів, для яких метод Пуассона-Абеля є ефективним.

Приклад 1. Ряд , розглянутий Ейлером, 1-1+1-1+…, в силу самого означення А-методу приводить нас до степеневого ряду, сума якого $\frac{1}{1+x}$ при $x \to 1-0$ прямує до $\frac{1}{2}$. Отже, число $\frac{1}{2}$ є узагальненою сумою вказаного ряду в точно встановленому тут сенсі.

Приклад 2. Тригонометричний ряд $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta (4)$ розбіжний при всіх $\theta, -\pi \le \theta \le \pi.$ Справді, якщо θ має вигляд $\frac{p}{q}\pi$, де p i q- натуральні числа, то для значень n, кратних q, буде $\cos n\theta = \pm 1$,тому не виконується необхідна умова збіжності ряду. Якщо ж відношення $\frac{\theta}{\pi}$ ірраціональне, то, розклавши його у нескінченний неперервний дріб і складаючи ланцюгові дроби $\frac{m}{n}$, будемо мати

$$\left|\frac{\theta}{\pi} - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^2},$$

звідки $|n\theta - m\pi| < \frac{\pi}{n}$. Таким чином, для нескінченної множини значень n
$|\cos n\theta \pm 1| < \frac{\pi}{n}$,тому $|\cos n\theta| > 1 - \frac{\pi}{n}$.

Це також свідчить про порушення необхідної умови збіжності ряду. Якщо утворити степеневий ряд $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta$, $(0 < r < 1)$, то його сума при значенні $\theta \neq 0$, буде $\frac{1}{2}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}$і при $r \to 1-0$прямує до 0. Таким чином, для $\theta \neq 0$ узагальненою сумою ряду буде 0. Якщо $\theta = 0$, то ряд (4) очевидно має суму, рівну +∞.

Приклад 3. Аналогічно ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \quad (-\pi \le \theta \le \pi)$,який збіжний лише при $\theta = 0$ або ±π, приводить до степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\theta = \frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}.$$

Тому узагальнена сума на цей раз дорівнює $\frac{1}{2}ctg\frac{1}{2}\theta$при $\theta \neq 0$ і рівною нулю при $\theta = 0$.

Властивості методу Пуассона-Абеля

Безпосередньо зрозуміло, що розглядуваний метод підсумовування є лінійним. Що стосується регулярності цього методу, то вона встановлюється наступною теоремою, яка належить Абелю:

Якщо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$збігається до суми S (у класичному розумінні), то для $0 < x < 1$ збігається степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$і сума його прямує до числа S при $x \to 1-0$.

Доведення

Очевидно, що радіус збіжності степеневого ряду не менший 1, тому для $0 < x < 1$ він збігається. Нам вже відома рівність

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n, \text{ де } S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n.$$

Віднімемо її почленно від такої тотожності

$$S = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S x^n.$$

Поклавши$S - S_n = \theta_n$одержимо таку рівність

$$S - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n x^n$$

Так як $\theta_n \to 0$, то для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер N, що $|\theta_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$, як тільки $n > N$.

Розіб'ємо суму ряду в правій частині останньої рівності на дві

$$(1-x)\sum_{n=0}^{N} \theta_n x^n \text{ і } (1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty} \theta_n x^n.$$

Друга сума оцінюється відразу і незалежно від xбудемо мати

$$\left|(1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty}\theta_n x^n\right| \le (1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty}|\theta_n|x^n < \frac{\varepsilon}{2}(1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty}x^n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Що стосується першої, то вона прямує до нуля при $x \to 1$ і при x достатньо близьких до 1 одержимо

$$\left|(1-x)\sum_{n=0}^{N}\theta_n x^n\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

тому остаточно

$$\left|S-\sum_{n=0}^{\infty}a_n\, x^n\right| < \varepsilon,$$

що і доводить теорему [7,398].

Попередні приклади переконують нас в тому, що із того, що ряд чи послідовність підсумовуються методом Пуассона-Абеля, не випливає що він збіжний в класичному розумінні. Правда, якщо, як показав Таубер, накласти на ряд додаткову умову, то із того, що ряд підсумовується методом Пуассона-Абеля випливає збіжність його послідовності часткових сум. До речі, такі умови після нього знаходили і багато інших математиків. Теореми, які вони отримували, дістали назву теорем тауберового типу.

Співвідношення між методами Чезаро та Пуассона-Абеля

Як ми бачили, сила методів Чезаро зростає із зростанням параметра α, проте наступні теореми [8,140] стверджують, що A-метод сильніший за всі.

Теорема 2. *Якщо ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *підсумовується* (C,α) *до суми* S*для деякого* α*, то він підсумовується і методом Пуассона-Абеля до тієї ж суми.*

Теорема 3.*Існують ряди, які підсумовуються A-методом, але не підсумовуються* (C,α) *для жодного* α.

Доведемо перше твердження, а саме покажемо, що має місце рівність:

$$A(x) = (1-x)^{\alpha+1}\sum_{k=0}^{\infty}E_k^{(\alpha)}C_k^{(\alpha)}x^k.$$

Справді,

$$(1-x)^{\alpha+1}\sum_{k=0}^{\infty}E_k^{(\alpha)}C_k^{(\alpha)}x^k=(1-x)^{\alpha+1}\sum_{k=0}^{\infty}E_k^{(\alpha)}\left(\frac{1}{E_k^{(\alpha)}}\sum_{i=0}^{k}E_{k-i}^{(\alpha-1)}S_k\right)x^k=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}E_{n-k}^{(\alpha+\delta-1)}S_k\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}E_n^{(\alpha+\delta-1)}x^n\sum_{k=0}^{\infty}S_kx^k=\frac{1}{(1-x)^{\alpha+\delta}}\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^n=$$

$$=\frac{1}{(1-x)^{\delta}}\sum_{n=0}^{\infty}E_n^{(\alpha-1)}x^n\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}E_n^{(\delta-1)}x^n\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(\alpha)}x^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}E_{n-k}^{(\delta-1)}A_k^{(\alpha)}\right)x^n.$$

Поскільки, як видно з цієї рівності, $A(x)$ є регулярним перетворенням послідовності $\left\{C_k^{(\alpha)}\right\}$, то отримаємо потрібний нам результат.

Для доведення теореми 3 означимо s_n як коефіцієнти степеневого ряду

$$f(x)=e^{\frac{1}{1+x}}=\sum a_nx^n.$$

Оскільки $f(x)$ аналітична всюди, крім точки$x=-1$, то цей ряд збігається для $|x|<1$; при цьому $f(x)\to e^{\frac{1}{2}}$, коли $x\to 1$. З іншого боку, s_nне є $O(n^{\alpha})$ні для якого α. Справді, звідси б слідувало, що

$$f(x)=O\left(\sum n^{\alpha}|x|^n\right)=O\left\{\frac{1}{(1-|x|)^{\alpha+1}}\right\}$$

рівномірно в крузі $|x|<1$, тоді як $f(x)$ прямує до нескінченності як $e^{\frac{1}{1-|x|}}$, коли $x\to -1$ по дійсних значеннях. В силу теореми 1, що виражає необхідну умову того, щоб ряд підсумовувався методом (C,α), все вище зазначене показує, що ряд$\sum a_n$ не підсумовується (C,α)для жодного α.

Таким чином, можна стверджувати, що метод Пуассона-Абеля є регулярним лінійним напівнеперервним перетворенням, яке є ефективним для деяких класів розбіжних рядів, в тому числі і деяких з тих, для яких не ефективними є класичні методи Чезаро.

РОЗДІЛ 2. УЗАГАЛЬНЕНІ МЕТОДИ ЧЕЗАРО ТА ПУАССОНА-АБЕЛЯ, СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ НИМИ

2.1Узагальнені методи Чезаро

Далі ми розглянемо групу методів, які є узагальненням класичних перетворень Чезаро, введених у розгляд Борвейном [9,319].

Нехай маємо послідовність $\{S_n\}$і$\alpha > 0, \beta > -1$. Покладемо

$$C_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{E_n^{(\alpha+\beta)}} \sum_{k=0}^{n} E_{n-k}^{(\alpha-1)} E_k^{(\beta)} S_k \,, \tag{1}$$

де $E_k^n = \binom{n+k}{k} = \frac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+1)}$, де *Г(x)*- гамма-функція.Тоді новоутворену послідовність $\left\{C_n^{(\alpha,\beta)}\right\}$ назвемо узагальненим перетворенням Чезаро порядку(α, β) (якщо $\beta = 0$, то ця послідовність стає послідовністю класичних середніх Чезаро порядку α). Якщо для якоїсь послідовності $\{S_n\}$ перетворення $\left\{C_n^{(\alpha,\beta)}\right\}$ має границю, що дорівнює S, то будемо говорити, що ця послідовність підсумовується до числа S узагальненим методом Чезаро порядку (α, β). Встановимо співвідношення між узагальненими середніми Чезаро по першому параметру. Виявляється, для них має місце співвідношення, виражене наступним твердженням [5,28].

Якщо $\alpha > 0, \beta > -1$ *і* $\delta > 0$*, то*

$$C_n^{(\alpha+\delta,\beta)} = \frac{1}{E_n^{(\alpha+\delta+\beta)}} \sum\nolimits_{k=0}^{n} E_{n-k}^{(\delta-1)} E_k^{(\alpha+\beta)} C_k^{(\alpha,\beta)} \;\; (n = 0,1,2 \dots),$$

де $C_n^{(\alpha,\beta)}$ $(n = 0,1,2 \dots)$*– середні, визначені для деякої послідовності* $\{S_n\}$ *формулою (1).*

Справді, позначимо через$A_n^{(\alpha,\beta)} = \sum_{k=0}^{n} E_{n-k}^{(\alpha-1)} E_k^{(\beta)} S_k$ $(n = 0,1,2, \dots)$.Тоді $C_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{A_n^{(\alpha,\beta)}}{E_n^{(\alpha+\beta)}} (n = 0,1,2, \dots)$ і, використовуючи формули множення рядів за правилом Коші, будемо мати

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(\alpha+\delta,\beta)} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} E_{n-k}^{(\alpha+\delta-1)} E_k^{(\beta)} S_k\right) x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(\alpha+\delta-1)} x^n \sum_{k=0}^{\infty} E_k^{(\beta)} S_k x^n \frac{1}{(1-x)^{\alpha+\delta}} \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{\beta} S_n x^n =$$

$$= \frac{1}{(1-x)^{\delta}} \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(\alpha-1)} x^n \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(\beta)} S_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(\delta-1)} x^n \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(\alpha,\beta)} x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} E_{n-k}^{(\delta-1)} A_k^{(\alpha,\beta)}\right) x^n.$$

Зауважимо, що ми в процесі цих перетворень скористались біноміальним розкладом для функцій $(1-x)^{-\alpha-\delta}$ і $(1-x)^{\delta}$.

Отже,

$$A_n^{(\alpha+\delta,\beta)} = \sum_{k=0}^{n} E_{n-k}^{(\delta-1)} A_k^{(\alpha,\beta)} = \sum_{k=0}^{n} E_{n-k}^{(\delta-1)} E_k^{(\alpha+\beta)} C_k^{(\alpha,\beta)} \; (n = 0,1,2, \dots).$$

Тому

$$C_n^{(\alpha+\delta,\beta)} = \frac{A_n^{(\alpha+\delta,\beta)}}{E_n^{(\alpha+\delta+\beta)}} = \frac{1}{E_n^{(\alpha+\delta+\beta)}} \sum_{k=0}^{n} E_{n-k}^{(\delta-1)} E_k^{(\alpha+\beta)} C_k^{(\alpha,\beta)}$$

і наше твердження доведене.

Поскільки перетворення послідовності $\left\{C_n^{(\alpha,\beta)}\right\}$ в послідовність $\left\{C_n^{(\alpha+\delta,\beta)}\right\}$, що задається останньою формулою є регулярним, що легко перевіряється з допомогою добре відомої теореми Тьопліца, то можна стверджувати, що із того, що ряд підсумовується методом (C, α, β) випливає те, що він підсумовується і методом $(C, \alpha+\delta, \beta)$ і до тієї ж суми для довільного $\delta > 0$. Цікаво було б знайти послідовності, для яких метод $(C, \alpha+\delta, \beta)$ ефективний, а (C, α, β)– ні. Розглянемо таку розбіжну послідовність $\{1,0,0,1,0,0,\dots\}$ і обчислимо для неї $C_n^{(\alpha,\beta)}$ порядків (1,0); (1,1); (2,0); (2,1); (1,2). Застосувавши до послідовності $\{S_n\}$ перетворення (C,1,0) і обчисливши $C_n^{(1,0)}$ з допомогою програмного забезпечення (див. дод. 1,2), одержимо, що $\lim_{n\to\infty} C_n^{(1,0)} = \frac{1}{3}$. Проте цей результат можна отримати і аналітично. З утвореної $\left\{C_n^{(1,0)}\right\}$ виділимо підпослідовності $\left\{C_{3n}^{(1,0)}\right\}$, $\left\{C_{3n-1}^{(1,0)}\right\}$, $\left\{C_{3n+1}^{(1,0)}\right\}$ і знайдемо їхні границі, тим самим обчислимо часткові границі $\left\{C_n^{(1,0)}\right\}$.

$$C_n^{(1,0)} = \frac{1}{E_n^1}\sum_{k=0}^{n} E_{n-k}^0 E_k^0 S_k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k.$$

$$C_{3n}^{(1,0)} = \frac{1}{3n+1}\sum_{k=0}^{3n} S_k = \frac{1}{3n+1}\sum_{i=1}^{n+1} 1 = \frac{1}{3n+1}(n+1),$$

$$\lim_{n\to\infty} C_{3n}^{(1,0)} = \frac{1}{3}.$$

$$C_{3n-1}^{(1,0)} = \frac{1}{3n-1+1}\sum_{k=0}^{3n-1} S_k = \frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{1}{3n}n,$$

$$\lim_{n\to\infty} C_{3n-1}^{(1,0)} = \frac{1}{3}.$$

$$C_{3n+1}^{(1,0)} = \frac{1}{3n+2}\sum_{k=0}^{3n+1} S_k = \frac{1}{3n+2}\sum_{i=1}^{n+1} 1 = \frac{1}{3n+2}(n+1),$$

$$\lim_{n\to\infty} C_{3n+1}^{(1,0)} = \frac{1}{3}.$$

Кожна з виділених нами підпослідовностей має своєю границею число $\frac{1}{3}$. Тому існує границя послідовності $\left\{C_n^{(1,0)}\right\}$, яка дорівнює $\frac{1}{3}$, значить наша послідовність підсумовується методом Чезаро$(C, 1{,}0)$ до числа $\frac{1}{3}$.Аналогічний результат одержимо для $C_n^{(1,1)}$ і $C_n^{(2,1)}$. Переконаємося в цьому, а саме -

утворимо послідовність $\left\{C_n^{(1,1)}\right\}$, виділимо з неї вище зазначені підпослідовності та покажемо, що всі її часткові границі дорівнюють $\frac{1}{3}$.

$$C_n^{(1,1)}=\frac{1}{E_n^2}\sum_{k=0}^{n}E_{n-k}^0E_k^1S_k=\frac{2}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}(k+1)S_k.$$

$$C_{3n}^{(1,1)}=\frac{2}{(3n+1)(3n+2)}\sum_{k=0}^{3n}(k+1)S_k=\frac{2}{(3n+1)(3n+2)}\sum_{i=0}^{n}(3i+1)=$$

$$=\frac{2}{(3n+1)(3n+2)}\left(3\sum_{i=0}^{n}i+\sum_{i=0}^{n}1\right)=$$

$$=\frac{2}{(3n+1)(3n+2)}\left(3\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)\right)=\frac{2(n+1)(3n+2)}{2(3n+1)(3n+2)}=\frac{(n+1)}{(3n+1)}.$$

$$\lim_{n\to\infty}C_{3n}^{(1,1)}=\frac{1}{3}.$$

Знайдемо тепер границю підпослідовності $\left\{C_{3n+1}^{(1,1)}\right\}$:

$$C_{3n+1}^{(1,1)}=\frac{2}{(3n+2)(3n+3)}\sum_{k=0}^{3n+1}(k+1)S_k=\frac{2}{3(n+1)(3n+2)}\sum_{i=0}^{n}(3i+1)=$$

$$=\frac{2}{3(n+1)(3n+2)}\left(3\sum_{i=0}^{n}i+\sum_{i=0}^{n}1\right)=$$

$$=\frac{2}{3(n+1)(3n+2)}\left(3\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)\right)=\frac{2(n+1)(3n+2)}{6(n+1)(3n+2)}=\frac{(n+1)}{(3n+1)}.$$

$$\lim_{n\to\infty}C_{3n+1}^{(1,1)}=\frac{1}{3}.$$

І насамкінець обчислимо границю такої підпослідовності послідовності $\left\{C_n^{(1,1)}\right\}$:

$$C_{3n+2}^{(1,1)} = \frac{2}{3(n+1)(3n+4)} \sum_{k=0}^{3n+2} (k+1)S_k = \frac{2}{3(n+1)(3n+4)} \sum_{i=0}^{n} (3i+1) =$$

$$= \frac{2}{3(n+1)(3n+4)} \left(3\sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n} 1 \right) =$$

$$= \frac{2}{3(n+1)(3n+4)} \left(3\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \right) = \frac{2(n+1)(3n+2)}{6(n+1)(3n+4)} = \frac{(3n+2)}{3(3n+4)}.$$

$$\lim_{n\to\infty} C_{3n+2}^{(1,1)} = \frac{1}{3}.$$

Зокрема, останній результат випливає із співвідношення, вираженого доведеним вище твердженням.

Застосування методу $C_n^{(1,2)}$ до даної послідовності також привело до позитивного результату – послідовність середніх $C_n^{(1,2)}$збіжна до числа $\frac{1}{3}$. Утворивши послідовність узагальнених середніх Чезаро порядку (1;2), ми з неї виділили три підпослідовності, які збігаються до одного і того ж числа,що і доводить наш результат. Запишемо узагальнені середні Чезаро порядку (1;2) для деякої послідовності $\{S_n\}$:

$$C_n^{(1;2)} = \frac{6}{(n+1)(n+2)(n+3)} \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)(k+2)}{2} S_k =$$

$$= \frac{3}{(n+1)(n+2)(n+3)} \sum_{k=0}^{n} (k+1)(k+2)S_k\,;$$

Нехай $n = 3m$. Тоді $C_n^{(1;2)}$ набувають вигляду

$$C_{3m}^{(1;2)} = \frac{3}{3(3m+1)(3m+2)(m+1)} \sum_{k=0}^{3m} (k+1)(k+2) =$$

$$= \frac{1}{(3m+1)(3m+2)(m+1)} \sum_{i=0}^{m} (3i+1)(3i+2) =$$

$$\frac{1}{(3m+1)(3m+2)(m+1)}\sum_{i=0}^{m}(9i^2+9i+2) =$$

$$= \frac{1}{(3m+1)(3m+2)(m+1)}\left(\frac{9(m+1)(2m+3)m}{6} + \frac{9(m+1)(m+1)}{2}\right.$$

$$\left. + \frac{4(m+1)}{2}\right) = \frac{3(m+1)(m)(2m+3) + 9(m+1)(m+1) + 4(m+1)}{2(3m+1)(3m+2)(m+1)} =$$

$$= \frac{(m+1)(3m(2m+3) + 9m + 9 + 4)}{2(3m+1)(3m+2)(m+1)} = \frac{(m+1)(6m^2 + 9m + 9m + 13)}{2(3m+1)(3m+2)(m+1)} =$$

$$= \frac{(m+1)(6m^2 + 18m + 13)}{2(3m+1)(3m+2)(m+1)}.$$

Таким чином існує

$$\lim_{m\to\infty} C_{3m}^{(1;2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(m+1)(6m^2+18m+13)}{2(3m+1)(3m+2)(m+1)} = \frac{1}{3}.$$

Нехай тепер $n = 3m + 1$. Будемо мати

$$C_{3m+1}^{(1;2)} = \frac{3}{3(3m+2)(m+1)(3m+4)}\sum_{k=0}^{3m+1}(3k+1)(3k+2) =$$

$$= \frac{1}{(3m+2)(m+1)(3m+4)}\sum_{i=0}^{m}(3i+1)(3i+2) =$$

$$= \frac{1}{(m+1)(3m+2)(3m+4)}\sum_{i=0}^{m}(9i^2+9i+2) =$$

$$= \frac{1}{(m+1)(3m+2)(3m+4)}\left(9\sum_{i=0}^{m} i^2 + 9\sum_{i=0}^{m} i + 2(m+1)\right) =$$

$$= \frac{1}{(m+1)(3m+2)(3m+4)}\left(9\frac{(m+1)(2m+3)(m)}{6} + 9\frac{(m+1)(m+1)}{2}\right.$$

$$\left. + 4\frac{(m+1)}{2}\right) =$$

$$= \frac{(m+1)}{(m+1)(3m+2)(3m+4)}\left(\frac{(3m)(2m+3) + 9m + 9 + 2m + 2}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{(3m+2)(3m+4)}\frac{6m^2 + 9m + 9m + 9 + 2m + 2}{2} = \frac{6m^2 + 20m + 11}{2(3m+2)(3m+4)}.$$

Знайдемо тепер границю підпослідовності $\{C_{3m+1}^{(1;2)}\}$послідовності $\{C_n^{(1;2)}\}$для нашої $\{S_n\}$:

$$\lim_{m\to\infty} C_{3m+1}^{(1;2)} = \lim_{m\to\infty}\frac{6m^2 + 20m + 11}{2(3m+2)(3m+4)} = \frac{1}{3}.$$

Обчислимо тепер $C_{3m+2}^{(1;2)}$ для заданої вище послідовності $\{S_n\}$:

$$C_{3m+2}^{(1;2)} = \frac{3}{3(m+1)(3m+4)(3m+5)}\sum_{k=0}^{3m+1}(k+1)(k+2) =$$

$$= \frac{1}{(m+1)(3m+4)(3m+5)}\sum_{i=0}^{m}(3i+1)(3i+2) =$$

$$= \frac{1}{(m+1)(3m+2)(3m+5)}\sum_{i=0}^{m}(9i^2 + 9i + 2) =$$

$$= \frac{1}{(m+1)(3m+2)(3m+5)}\left(9\sum_{i=0}^{m} i^2 + 9\sum_{i=0}^{m} i + 2(m+1)\right) =$$

$$= \frac{1}{(3m+2)(3m+5)} \frac{6m^2 + 9m + 9m + 9 + 2m + 2}{2} =$$

$$= \frac{6m^2 + 20m + 11}{2(3m+2)(3m+5)}.$$

$$\lim_{m\to\infty} C_{3m+2}^{(1;2)} = \lim_{m\to\infty} \frac{6m^2 + 20m + 11}{2(3m+2)(3m+5)} = \frac{1}{3}.$$

Приклад наведеної вище послідовності не дає можливості нам судити про те, як змінюється сила узагальнених методів Чезаро із зростанням другого параметра. Проте,вище ми вже згадували ряд 1-2+3-4+…, для якого неефективним є метод середніх арифметичних, але ефективний класичний метод Чезаро порядку 2. Застосуємо перетворення $C_n^{(1,2)}$ для нього і обчислимо границі підпослідовностей$\{C_{2n}^{(1;2)}\}$ та $\{C_{2n+1}^{(1;2)}\}$ послідовності $\{C_n^{(1;2)}\}$:

$$C_n^{(1;2)} = \frac{6}{(n+1)(n+2)(n+3)} \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)(k+2)}{2} S_k =$$

$$= \frac{3}{(n+1)(n+2)(n+3)} \sum_{k=0}^{n} (k+1)(k+2) S_k \, ;$$

$$C_{2n}^{(1,2)} = \frac{3}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)} \sum_{k=0}^{2n} (k+1)(k+2) S_k$$

Позначимо через $A_{2n}^{(1,2)} = \sum_{k=0}^{2n} (k+1)(k+2) S_k$ і обчислимо її

$$A_{2n}^{(1,2)} = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)(2k+2)(k+1) - \sum_{k=1}^{n} 2k^2(2k+1) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (4k^3 + 10k^2 + 8k + 2) - \sum_{k=1}^{n} (4k^3 + 2k^2) =$$

$$= 10\sum_{k=0}^{n} k^2 + 8\sum_{k=0}^{n} k + 2\sum_{k=0}^{n} 1 - 2\sum_{k=1}^{n} k^2 =$$

$$= 10\frac{(n+1)n(2n+1)}{6} + 8\frac{(n+1)n}{2} + 2(n+1) - 2\frac{(n+1)n(2n+1)}{6} =$$

$$= 8\frac{(2n+1)n(n+1)}{6} + 8\frac{(n+1)n}{2} + 2(n+1) =$$

$$= \frac{(n+1)}{6}(8n(2n+1) + 24n + 12) = \frac{(n+1)}{6}(16n^2 + 8n + 24n + 12) =$$

$$= \frac{(n+1)(16n^2 + 32n + 12)}{6}.$$

$$C_{2n}^{(1,2)} = \frac{3(n+1)(16n^2 + 32n + 12)}{6(2n+1)(2n+2)(2n+3)} = \frac{(16n^2 + 32n + 12)}{4(2n+1)(2n+3)},$$

а тому$\lim_{n\to\infty} C_{2n}^{(1,2)} = 1$.

Знайдемо тепер границю підпослідовності $\{C_{2n+1}^{(1;2)}\}$.

$$C_{2n+1}^{(1,2)} = \frac{3}{(2n+2)(2n+3)(2n+4)} \sum_{k=0}^{2n+1} (k+1)(k+2)S_k.$$

Як і в попередньому випадку для зручності позначимо через

$$A_{2n+1}^{(1,2)} = \sum_{k=0}^{2n+1} (k+1)(k+2)S_k$$

та обчислимо спочатку їх:

$$A_{2n+1}^{(1,2)} = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)(2k+2)(k+1) - \sum_{k=1}^{n+1} 2k^2(2k+1) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (4k^3 + 10k^2 + 8k + 2) - \sum_{k=1}^{n+1} (4k^3 + 2k^2) =$$

$$= 4\left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^2 + 10\frac{(n+1)n(2n+1)}{6} + 8\frac{(n+1)n}{2} + 2(n+1) -$$

$$-4\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 - 2\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} =$$

$$= (n+1) \times$$

$$\times\left((n+1)n^2 + \frac{5n(2n+1)}{3} + 4n + 2 - (n+1)(n+2)^2 - \frac{(n+2)(2n+3}{3}\right) =$$

$$= \frac{(n+1)}{3}(3n^2(n+1) + 5n(2n+1) + 12n + 6 - 3(n+1)(n+2)^2 -$$

$$-(n+2)(2n+3)) = \frac{(n+1)}{3}(3(n+1)(n^2 - n^2 - 4n - 4) + 10n^2 + 5n +$$

$$+12n + 6 - 2n^2 - 3n - 4n - 6) = \frac{(n+1)}{3}(-12(n+1)^2 + 8n^2 + 10n) =$$

$$= \frac{(n+1)(-12(n^2+2n+1) + 8n^2 + 10n)}{3} = \frac{(n+1)(-4n^2 - 14n - 12)}{3}.$$

$$C_{2n+1}^{(1,2)} = \frac{3}{(2n+2)(2n+3)(2n+4)}\frac{(n+1)(-4n^2 - 14n - 12)}{3} =$$

$$= \frac{-4(n^2 - 3{,}5n - 3)(n+1)}{(2n+2)(2n+3)(2n+4)}.$$

А отже існує$\lim_{n\to\infty} C_{2n+1}^{(1,2)} = -\frac{1}{2}$.Бачимо, що наша послідовність має дві часткові границі, не рівні між собою, а тому вона розбіжна. Це, в свою чергу, дозволяє стверджувати, що метод $C_n^{(1,2)}$ не ефективний для неї. А оскільки ми знаємо, що дана послідовність підсумовується $C_n^{(2)}$, то можемо висловити припущення, що із зростанням другого параметра сила узагальнених методів Чезароспадає.

2.2Узагальнені методи Пуассона-Абеля, співвідношення між ними. Взаємозв'язки між узагальненими середніми Чезаро та Пуассона-Абеля

Далі ми розглянемо деякі узагальнення попередніх методів, які запропонував Борвейн.

Нехай маємо послідовність $\{S_n\}$і$\beta > -1$. Розглянемо функцію

$A_\beta(x) = (1-x)^{\beta+1} \sum_{k=0}^{\infty} E_k^{(\beta)} S_k x^k (0 \le x <$
$1)$, (2)яка називається середніми послідовності при умові, що ряд у правій частині рівності збіжний для всіх $x \in [0;1)$. Якщо $\exists \lim_{x\to 1-0} A_\beta(x)$, то будемо говорити, що послідовність $\{S_n\}$ підсумовується узагальненим методом A_β Пуассона-Абеля. Якщо у формулі (2) покласти $\beta = 0$, то середні $A_\beta(x)$ стають класичними середніми Абеля-Пуассона і набувають вигляду,

$$A(x) = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Узагальнені середні Чезаро та Пуассона-Абеля також пов'язані між собою, а саме справедлива рівність,

$$A_\beta(x) = (1-x)^{\alpha+\beta+1}\sum_{k=0}^{\infty} E_k^{(\alpha+\beta)} C_k^{(\alpha,\beta)} x^k. \qquad (3)$$

Справді,

$$(1-x)^{\alpha+\beta+1}\sum_{k=0}^{\infty} E_k^{(\alpha+\beta)} C_k^{(\alpha,\beta)} x^k =$$

$$= (1-x)^{\beta+1}(1-x)^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty} E_k^{(\alpha+\beta)}\left(\frac{1}{E_k^{(\alpha+\beta)}}\sum_{i=0}^{k} E_{k-i}^{(\alpha-1)} E_i^{(\beta)} S_k\right) x^k =$$

$$= (1-x)^{\beta+1}(1-x)^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}E_k^{(\alpha+\beta)}\frac{1}{E_k^{(\alpha+\beta)}}\left(\sum_{i=0}^{k}E_{k-i}^{(\alpha-1)}E_i^{(\beta)}S_k\right)x^k =$$

$$= (1-x)^{\beta+1}(1-x)^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}E_k^{(\alpha-1)}x^k\sum_{k=0}^{\infty}E_k^{(\beta)}S_kx^k =$$

$$= (1-x)^{\beta+1}(1-x)^{\alpha}\frac{1}{(1-x)^{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}E_k^{(\beta)}S_kx^k =$$

$$= (1-x)^{\beta+1}\sum_{k=0}^{\infty}E_k^{(\beta)}S_kx^k = A_{\beta}(x).$$

і рівність (3) доведена. Поскільки, як видно з рівності (3), $A_{\beta}(x)$є регулярним перетворенням послідовності $\left\{C_k^{(\alpha,\beta)}\right\}$, то із того, що послідовність (ряд) підсумовується узагальненим методом Чезаро випливає те, що він підсумовується і узагальненим методом Пуассона-Абеля до тієї ж суми. Обернене твердження неправильне, бо воно, як ми вже показали вище, невірне для $\beta = 0$.

Встановимо співвідношення між методами Пуассона-Абеля різних порядків. Для цього подібно до формули (1) спробуємо показати, що якесь $A_{\beta}(x)$є регулярним перетворенням якогось $A_{\lambda}(x)$. Для цьогозробимо заміну $x = \frac{y}{1+y}$ в рівності (2). Тоді матимемо, що

$$A_{\lambda}(y) = (1+y)^{-1-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}E_n^{\lambda}S_n\left(\frac{y}{1+y}\right)^n$$

і якщо тепер вже існує $\lim_{y\to\infty}A_{\lambda}(y) = S$, то послідовність $\{S_n\}$ підсумовується A_{λ} до числа S. Для того, щоб розв'язати поставлену вище проблему доведемо таке твердження:

Якщо $\lambda > \mu > -1,\ y > 0,\ n = 0,1,2,\ldots$, то

$$\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\lambda-\mu)}E_n^\lambda y^{-\lambda}\int_0^y (y-t)^{\lambda-\mu-1}t^{\mu+n}(1+t)^{-\lambda-1-n}dt =$$

$$= E_n^\mu (1+y)^{-\mu-1}\left(\frac{y}{1+y}\right)^n. \qquad (4)$$

Для цього обчислимо інтеграл у лівій частині рівності (4). Щоб це зробити, позначимо через

$$B(\lambda,\mu) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\lambda-\mu)}E_n^\lambda y^{-\lambda}\int_0^y (y-t)^{\lambda-\mu-1}t^{\mu+n}(1+t)^{-\lambda-1-n}dt$$

та винесемоyз перших дужок і зробимо заміну $\frac{t}{y} = u$. Тоді $t = yu, dt = ydu$. Оскільки при $t = 0 \;\; u = 0$, а при $t = y \;\; u = 1$, то цей інтеграл

$$\int_0^y (y-t)^{\lambda-\mu-1}t^{\mu+n}(1+t)^{-\lambda-1-n}dt =$$

$$= \int_0^y \left(\left(1-\frac{t}{y}\right)y\right)^{\lambda-\mu-1}\left(\frac{t}{y}\right)^{\mu+n} y^{\mu+n}\left(1+\frac{t}{y}y\right)^{\lambda-1-n} dt =$$

$$= \int_0^1 (1-u)^{\lambda-\mu-1}y^{\lambda-\mu-1}u^{\mu+n}y^{\mu+n}(1+yu)^{\lambda-1-n}ydu =$$

$$= \int_0^1 (1-u)^{\lambda-\mu-1}u^{\mu+n}(1+yu)^{\lambda-1-n}y^{\lambda-\mu-1+\mu+n+1}du =$$

$$= \int_0^1 u^{\mu+n}(1-u)^{\lambda-\mu-1}\frac{1}{(1+yu)^{n+1-\lambda}}y^{\lambda+n}du.$$

Тепер зробимо ще одну заміну $\frac{u}{1+yu} = z$. Тоді $u = \frac{z}{1-yz}$,

$du = \frac{1}{(1-yz)^2}dz$. Оскільки при $u = 0 \;\; z = 0$, а при $u = 1 \;\; z = \frac{1}{1+y}$, то далі

будемо мати,

$$\int_0^y (y-t)^{\lambda-\mu-1} t^{\mu+n} (1+t)^{-\lambda-1-n} dt =$$

$$= y^{\lambda+n} \int_0^{\frac{1}{1+y}} \left(z^{\mu+n} (1-(1+y)z)^{\lambda-\mu-1} (1-yz)^2 \frac{1}{(1-yz)^2} \right) dz =$$

$$= y^{\lambda+n} \frac{1}{(1+y)^{\mu+n+1}} \int_0^{\frac{1}{1+y}} \left(\left((1+y)z\right)^{\mu+n} (1-(1+y)z)^{\lambda-\mu-1} \right) d(1+y)z =$$

$$= \frac{y^{\lambda+n}}{(1+y)^{\mu+n+1}} \int_0^1 \left(x^{\mu+n} (1-x)^{\lambda-\mu-1} \right) dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\mu+n+1)\Gamma(\lambda-\mu) y^{n+\lambda}}{\Gamma(\mu+n+1+\lambda-\mu)(1+y)^{\mu+n+1}}.$$

Отже, ми отримали рівність,

$$\int_0^y (y-t)^{\lambda-\mu-1} t^{\mu+n} (1+t)^{-\lambda-1-n} dt = \frac{\Gamma(\mu+n+1)\Gamma(\lambda-\mu) y^{n+\lambda}}{\Gamma(\mu+n+1+\lambda-\mu)(1+y)^{\mu+n+1}} \quad (5)$$

Помноживши обидві частини рівності (5) на $\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\lambda-\mu)} E_n^{\lambda} y^{-\lambda}$, будемо мати

$$B(\lambda,\mu) = \frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\mu+n+1)\Gamma(\lambda-\mu)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\lambda-\mu)\Gamma(n+1+\lambda)} y^{-\lambda} \left(\frac{y}{1+y}\right)^n (1+y)^{-\mu-1} y^{\lambda} =$$

$$= \frac{\Gamma(\mu+n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\mu+1)} \left(\frac{y}{1+y}\right)^n (1+y)^{-\mu-1} = E_n^{\mu} (1+y)^{-\mu-1} \left(\frac{y}{1+y}\right)^n,$$

і значить рівність (4) доведена.

Тепер вже маючи її, можна довести наступну рівність, яка і розв'язує поставлену вище проблему

$$A_\mu(y) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\lambda-\mu)} y^{-\lambda} \int_0^y (y-t)^{\lambda-\mu-1} t^{\mu} A_\lambda(t) dt. \quad (6)$$

Справді, запишемо вирази для $A_\mu(y)$ та $A_\lambda(y)$ на основі рівності (2)

$$A_\mu(y) = (1+y)^{-1-\mu}\sum_{n=0}^{\infty} E_n^\mu S_n\left(\frac{y}{1+y}\right)^n \tag{7}$$

$$A_\lambda(y) = (1+y)^{-1-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} E_n^\lambda S_n\left(\frac{y}{1+y}\right)^n. \tag{8}$$

Обчислимо праву частину рівності (5) скориставшись (8) будемо мати,якщо врахувати, що ряд, одержаний в процесі нижче приведених викладок можна почленно інтегрувати (як фактично степеневий на відрізку з інтервала збіжності) і доведену рівність (3),

$$\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\lambda-\mu)}y^{-\lambda}\int_0^y (y-t)^{\lambda-\mu-1}t^\mu A_\lambda(t)dt =$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\lambda-\mu)}y^{-\lambda}\int_0^y (y-t)^{\lambda-\mu-1}t^\mu(1+t)^{-\lambda-1}\sum_{n=0}^{\infty} E_n^\lambda S_n\left(\frac{t}{1+t}\right)^n dt =$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\lambda-\mu)}y^{-\lambda}\int_0^y \sum_{n=0}^{\infty}(y-t)^{\lambda-\mu-1}t^{\mu+n}(1+t)^{-\lambda-1-n}E_n^\lambda S_n\, dt =$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\lambda-\mu)}y^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} E_n^\lambda S_n\int_0^y (y-t)^{\lambda-\mu-1}t^{\mu+n}(1+t)^{-\lambda-1-n}dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\lambda-\mu)}E_n^\lambda y^{-\lambda}\int_0^y (y-t)^{\lambda-\mu-1}t^{\mu+n}(1+t)^{-\lambda-1-n}dt\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} S_n E_n^\mu(1+y)^{-\mu-1}\left(\frac{y}{1+y}\right)^n = (1+y)^{-\mu-1}\sum_{n=0}^{\infty} S_n E_n^\mu\left(\frac{y}{1+y}\right)^n = A_\mu(y),$$

а це і є потрібна нам рівність (6).

Враховуючи доведене співвідношення між середніми Пуассона-Абеля різних порядків, можна стверджувати наступне:

якщо послідовність $\{S_n\}$ підсумовується A_λ до деякого числа S при $\lambda > -1$, то вона підсумовується і A_μдо того ж числа для довільного μ, що задовольняє нерівність $\lambda > \mu > -1$. Таким чином, на відміну від класичних методів Чезаро, сила яких зростає із ростом параметра, для узагальнених методів Пуассона-Абеля навпаки - їх сила зростає із зменшенням параметра і найсильнішими є методи, значення параметра яких близьке до -1.

ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто класичні та узагальнені методи Чезаро та Пуассона-Абеля підсумовування рядів та послідовностей, встановлено співвідношення між ними, а саме:

- показано, що із зростанням першого параметра сила узагальнених методів Чезаро не слабшає;
- доведено співвідношення між узагальненими перетвореннями Чезаро та Пуассона-Абеля;
- встановлено, що сила A_β-методів зростає із зменшенням параметра.Використовуючи вище зазначені результати та означення A_β-методів, можна стверджувати, що найсильнішими серед них є ті, у яких значення параметра близьке до -1.

Уроботівикладеноматеріал так, щоб студентиматематичнихспеціальностейсамостійно моглирозібратисьв узагальнених методах Чезаро та Пуассона-Абеля підсумовування рядів та послідовностей.

Для ілюстраціїметодів підсумовування Чезаро порядку (1;1) та (2;1) для послідовності {1,0,0,1,0,0,…}було проведено чисельнийексперимент, використовуючипрограмнурозробку, створенузасобамисередовищапрограмуванняPascal. Чисельнийексперимент для відшукання узагальнених середніх Чезаро показав:

- ✓ метод підсумовування Чезаро порядку (1;1) підсумовує нашу послідовність до числа $\frac{1}{3}$;
- ✓ метод підсумовування Чезаро порядку (2;1) підсумовує нашу послідовність до числа $\frac{1}{3}$.

Список використаних літературних джерел:

1. Барон. Введение в теорию суммируемостирядов. – Таллин: «Валгус». – 1977.– 280с.
2. Давидов М.О. Курс математичногоаналізу. Ч.1. – К: Вища школа, 1990. – 384с.
3. Ильин и др. Математический анализ. Продолжение курса / В.А.Ильин, В.А.Садовничий, Бл.Х.Сендов. Под ред. А.Н.Тихонова.– М.:Изд-во МГУ, 1987. – 358с.
4. Зигмунд А. Тригонометрическиеряды. Том 1. –М.: «МИР». – 1965.– 616с.
5. Лотоцкий В.А. О ядрах регулярных положительных преобразований ограниченных последовательностей. – К.: Киевский государственный педагогический институт им. А.М.Горького.– 1978.–131с.
6. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Том 2.Дальнешеепостроениетеории.–Санкт-Петербург: «Лань». – 2009. – 624с.
7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегральногоисчислений, том II. – М.: «Наука». – 1970.–800с.
8. Харди Г. Расходящиеся ряды. – М.: ИНД.– 1951.–504с.

9. Borwein D. On a scale of Abel-type summability methods. − Proc. Cambridge philos. Soc., v.53, 1957.

Додаток 1

Програма для обчислення узагальнених середніх Чезаро порядку (1;1) для послідовності {1,0,0,1,0,0,…}

```
var f:text;
i,m,s:Integer;Sn,C:real;st,st2:string;
    begin
    read(m);
    assign(f,'outputC.txt');
    rewrite(f);
    Sn:=0;
        for i:=0 to m do
        begin
        if(i mod 3 =0 ) then s:=1 else s:=0;
        Sn:=Sn+(i+1)*s;
         C:=2/(i+1)/(i+2)*Sn;
        str(C:6:6,st);
        str(i,st2);
        writeln(f,st2+'='+st);
        end;
```

```
end.
```

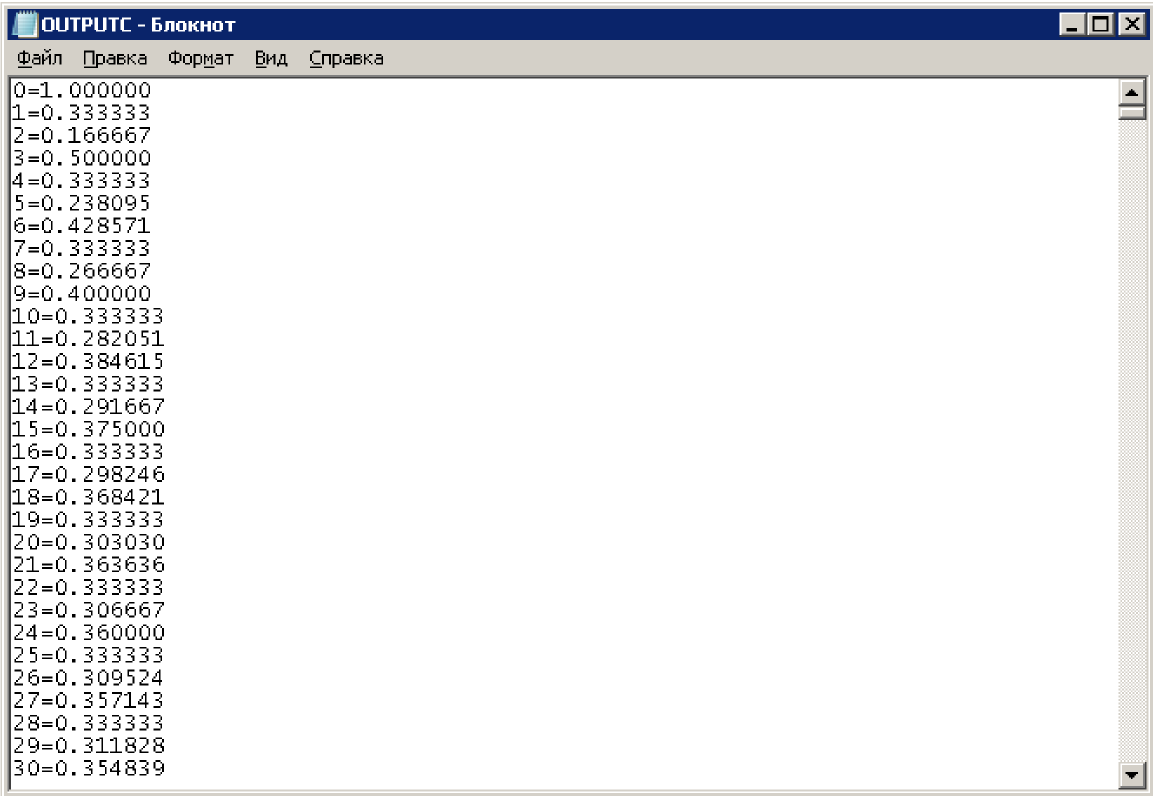
Програма для обчислення узагальнених середніх Чезаро порядку (2;1) для послідовності {1,0,0,1,0,0,…}

```
var f,f1:text;
i,m,s,code:Integer;j,Sn1,C1,C2,Sn, C:real;st,st2:string;
    begin
    read(m);
    assign(f,'outputC.txt');
    assign(f1,'ouputs.txt');
    rewrite(f);
    Sn:=0;
        for i:=0 to m do
        begin
        if(i mod 2 =0 ) then s:=i*i else s:=0;
        Sn:=Sn+(i+1)*S;
        C:=2/(i+1)/(i+2)*Sn;
        str(C:4:6,st);
        str(i,st2);
        writeln(f,st);
        end;
```

```
close (f);
        reset(f);
        rewrite(f1);
        Sn1:=0;   j:=0;
                whilenoteof (f) do
                begin
                readln (f,st);
                val (st, C1, code);
                  Sn1:=Sn1+(j+1)*(j+2)*C1;
                  C2:=3/(j+1)/(j+2)/(j+3)*Sn1;
                str(C2:4:6,st);
                str(j:4:1,st2);
                writeln(f1,st2+'='+st);
                  j:=j+1;
                end;
end.
```

Додаток 2

Узагальнені середні Чезаро порядку (1;1) для послідовності {1,0,0,1,0,0,…}

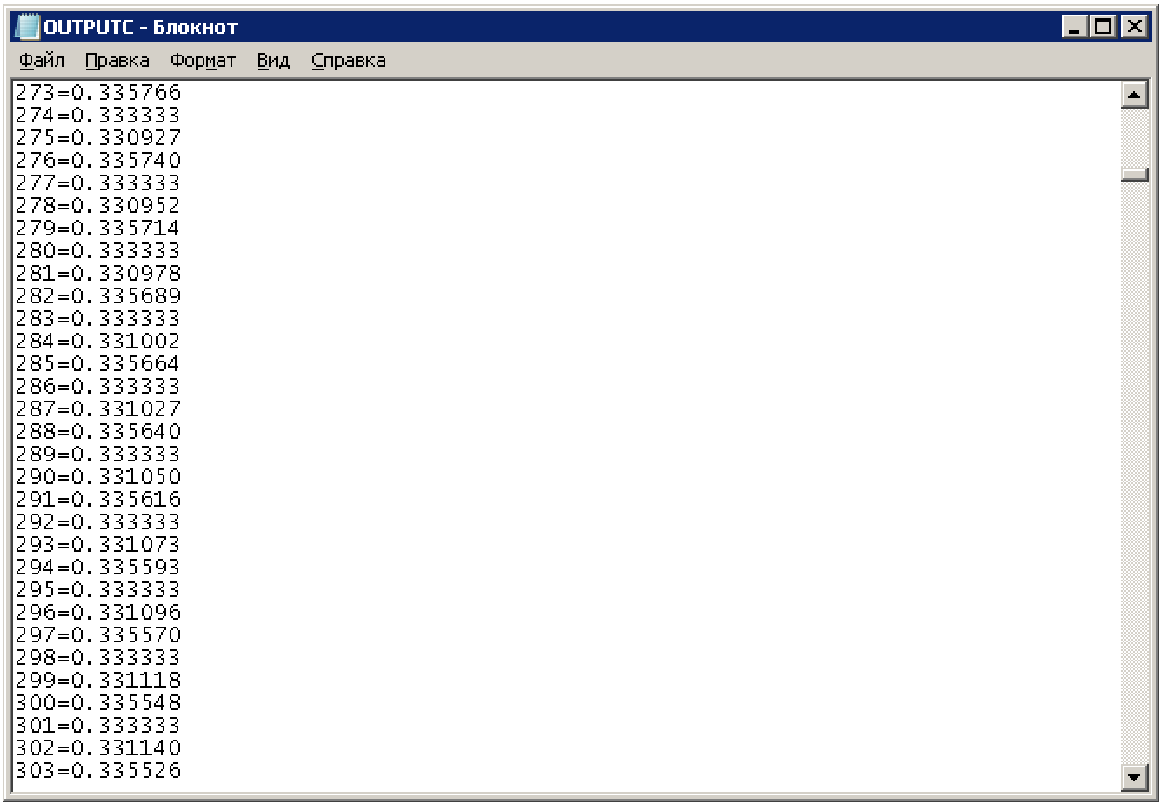


OUTPUTC - Блокнот

Файл Правка Формат Вид Справка

```
0=1.000000
1=0.333333
2=0.166667
3=0.500000
4=0.333333
5=0.238095
6=0.428571
7=0.333333
8=0.266667
9=0.400000
10=0.333333
11=0.282051
12=0.384615
13=0.333333
14=0.291667
15=0.375000
16=0.333333
17=0.298246
18=0.368421
19=0.333333
20=0.303030
21=0.363636
22=0.333333
23=0.306667
24=0.360000
25=0.333333
26=0.309524
27=0.357143
28=0.333333
29=0.311828
30=0.354839
```

Значення $C_n^{(1,1)}$ *для* n*від 0 до 30*

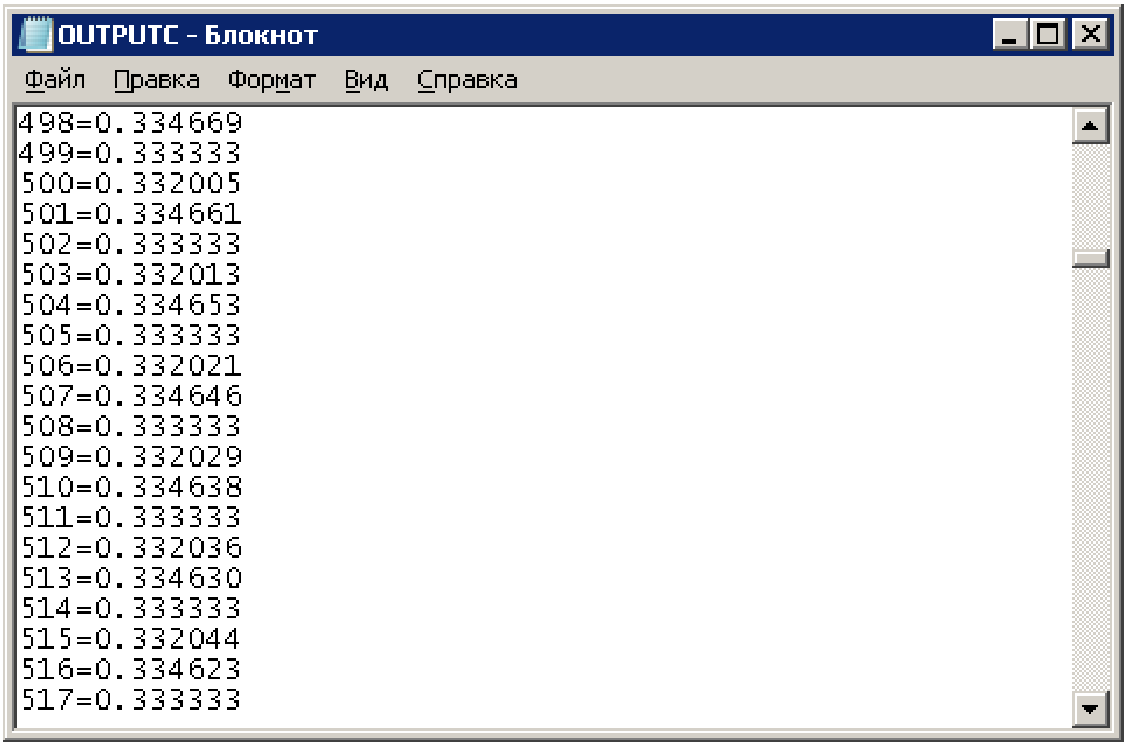


OUTPUTC - Блокнот

Файл Правка Формат Вид Справка

273=0.335766
274=0.333333
275=0.330927
276=0.335740
277=0.333333
278=0.330952
279=0.335714
280=0.333333
281=0.330978
282=0.335689
283=0.333333
284=0.331002
285=0.335664
286=0.333333
287=0.331027
288=0.335640
289=0.333333
290=0.331050
291=0.335616
292=0.333333
293=0.331073
294=0.335593
295=0.333333
296=0.331096
297=0.335570
298=0.333333
299=0.331118
300=0.335548
301=0.333333
302=0.331140
303=0.335526

Значення $C_n^{(1,1)}$ для nвід 273 до 303

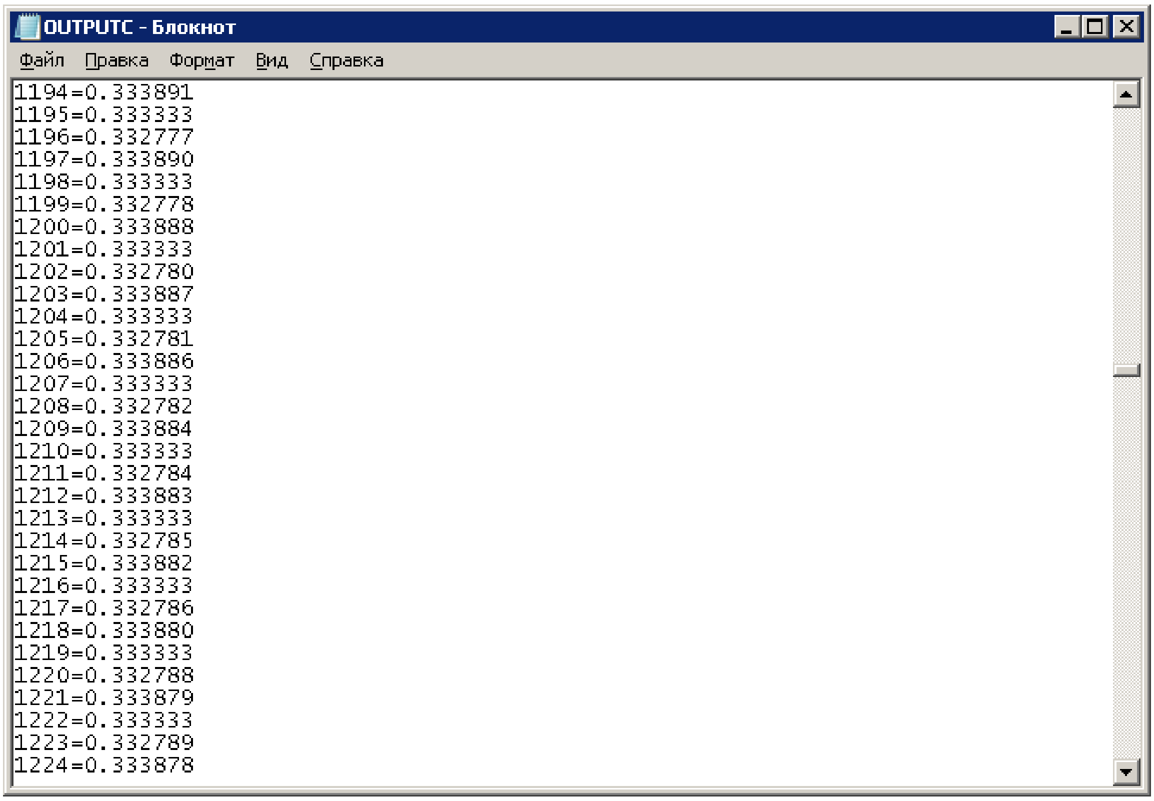


OUTPUTC - Блокнот

Файл Правка Формат Вид Справка

498=0.334669
499=0.333333
500=0.332005
501=0.334661
502=0.333333
503=0.332013
504=0.334653
505=0.333333
506=0.332021
507=0.334646
508=0.333333
509=0.332029
510=0.334638
511=0.333333
512=0.332036
513=0.334630
514=0.333333
515=0.332044
516=0.334623
517=0.333333

Значення $C_n^{(1,1)}$ для nвід 498 до 517

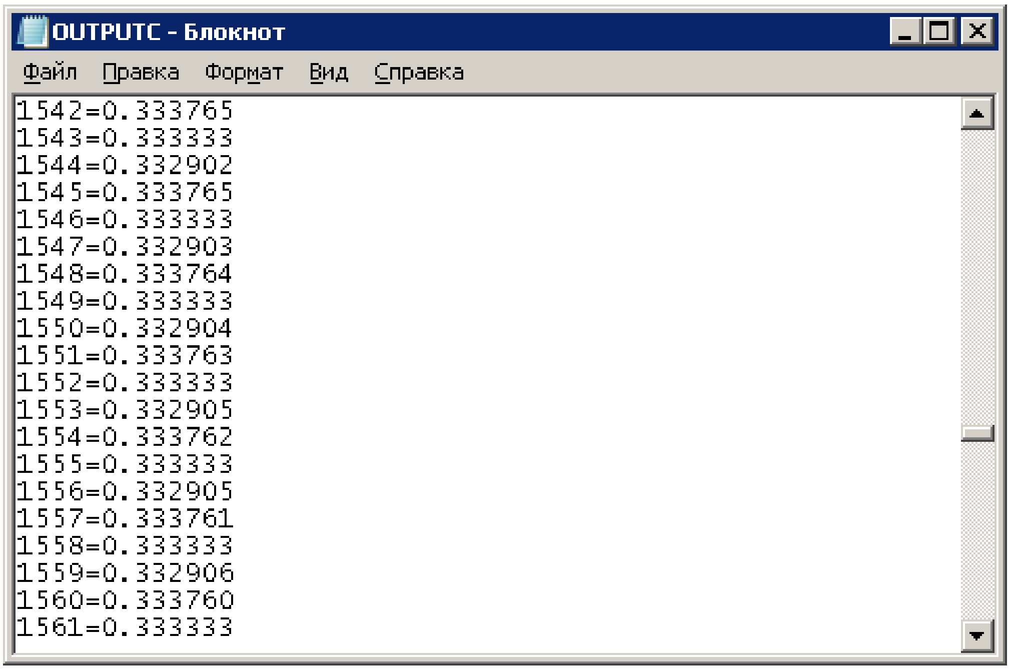


OUTPUTC - Блокнот

Файл Правка Формат Вид Справка

1194=0.333891
1195=0.333333
1196=0.332777
1197=0.333890
1198=0.333333
1199=0.332778
1200=0.333888
1201=0.333333
1202=0.332780
1203=0.333887
1204=0.333333
1205=0.332781
1206=0.333886
1207=0.333333
1208=0.332782
1209=0.333884
1210=0.333333
1211=0.332784
1212=0.333883
1213=0.333333
1214=0.332785
1215=0.333882
1216=0.333333
1217=0.332786
1218=0.333880
1219=0.333333
1220=0.332788
1221=0.333879
1222=0.333333
1223=0.332789
1224=0.333878

Значення $C_n^{(1,1)}$ для nвід 1194 до 1224



OUTPUTC - Блокнот

Файл Правка Формат Вид Справка

1542=0.333765
1543=0.333333
1544=0.332902
1545=0.333765
1546=0.333333
1547=0.332903
1548=0.333764
1549=0.333333
1550=0.332904
1551=0.333763
1552=0.333333
1553=0.332905
1554=0.333762
1555=0.333333
1556=0.332905
1557=0.333761
1558=0.333333
1559=0.332906
1560=0.333760
1561=0.333333

Значення $C_n^{(1,1)}$ для nвід 1542 до 1561

OUTPUTC - Блокнот

Файл Правка Формат Вид Справка

```
2028=0.333662
2029=0.333333
2030=0.333005
2031=0.333661
2032=0.333333
2033=0.333006
2034=0.333661
2035=0.333333
2036=0.333006
2037=0.333660
2038=0.333333
2039=0.333007
2040=0.333660
2041=0.333333
2042=0.333007
2043=0.333659
2044=0.333333
2045=0.333008
2046=0.333659
2047=0.333333
```

Значення $C_n^{(1,1)}$ *для пвід 2028 до 2047*

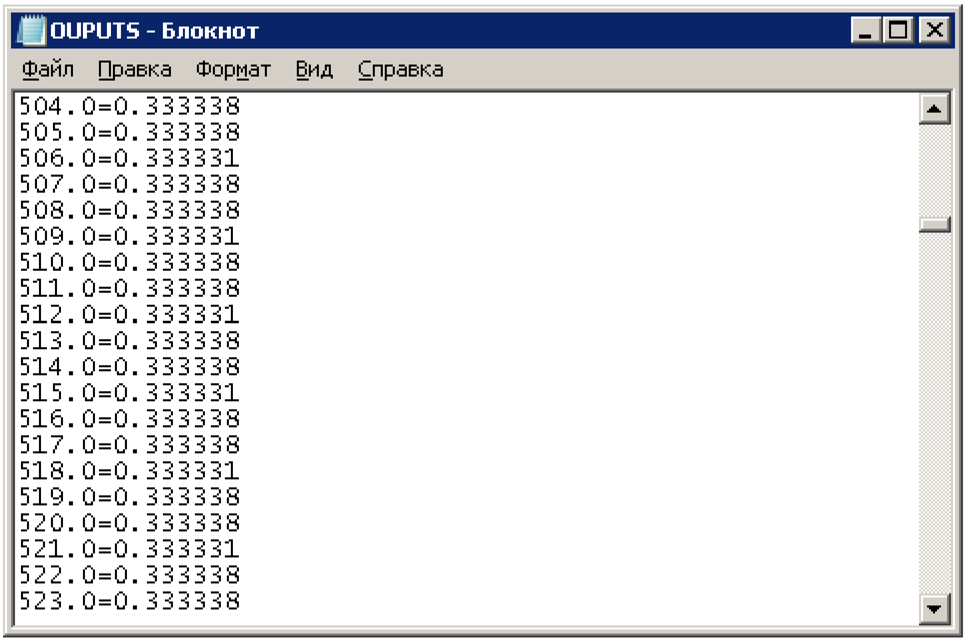
Узагальнені середні Чезаро порядку (2;1) для послідовності {1,0,0,1,0,0,...}

OUPUTS - Блокнот

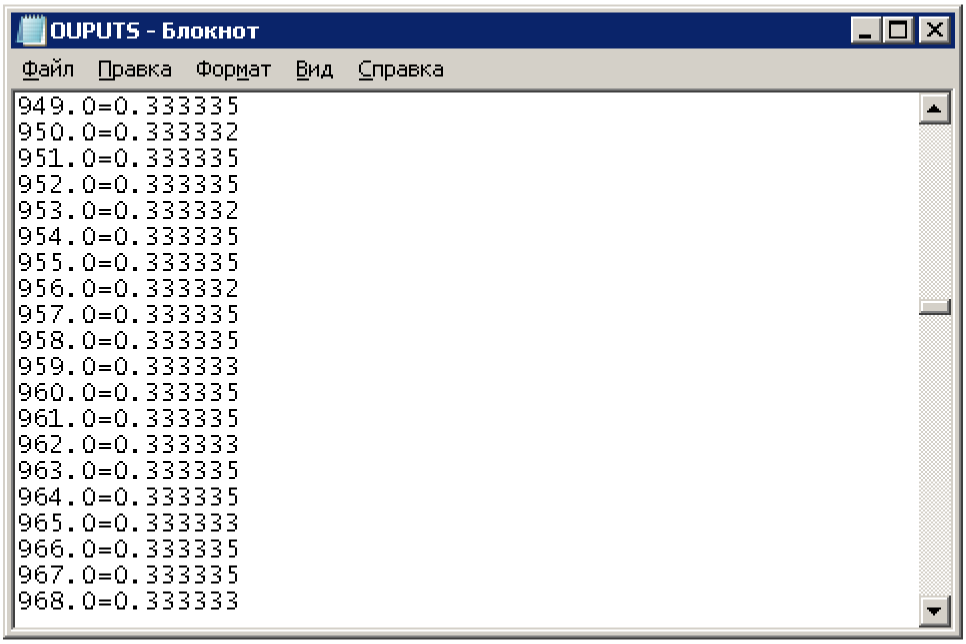
Файл Правка Формат Вид Справка

```
 0.0=1.000000
 1.0=0.500000
 2.0=0.300000
 3.0=0.400000
 4.0=0.371428
 5.0=0.321428
 6.0=0.357143
 7.0=0.350000
 8.0=0.327273
 9.0=0.345454
10.0=0.342657
11.0=0.329670
12.0=0.340659
13.0=0.339285
14.0=0.330882
15.0=0.338235
16.0=0.337461
17.0=0.331579
18.0=0.336842
19.0=0.336364
```

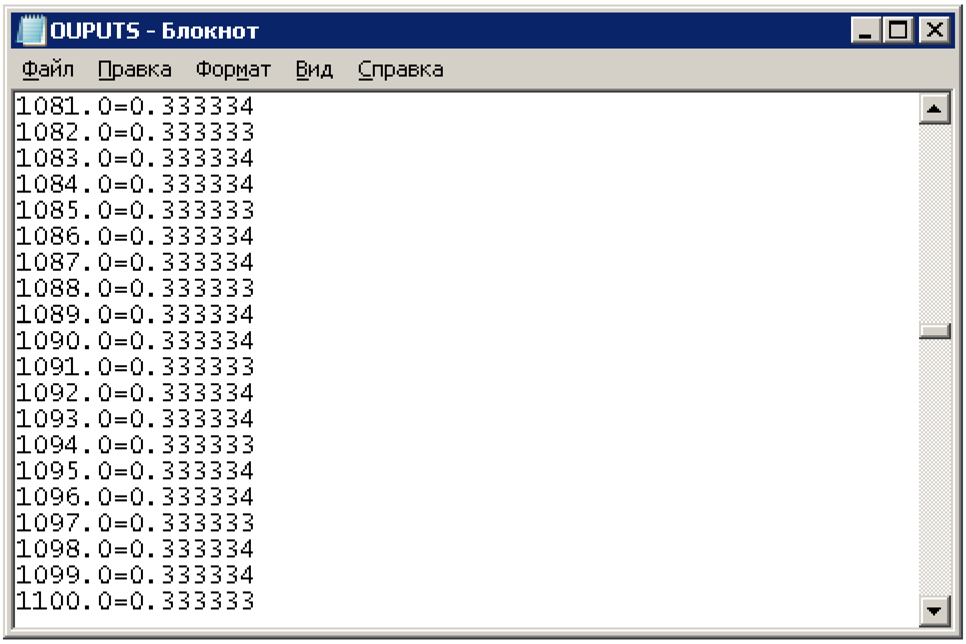
Значення $C_n^{(2,1)}$ для пвід 0 до 19



Значення $C_n^{(2,1)}$ для пвід 504 до 523

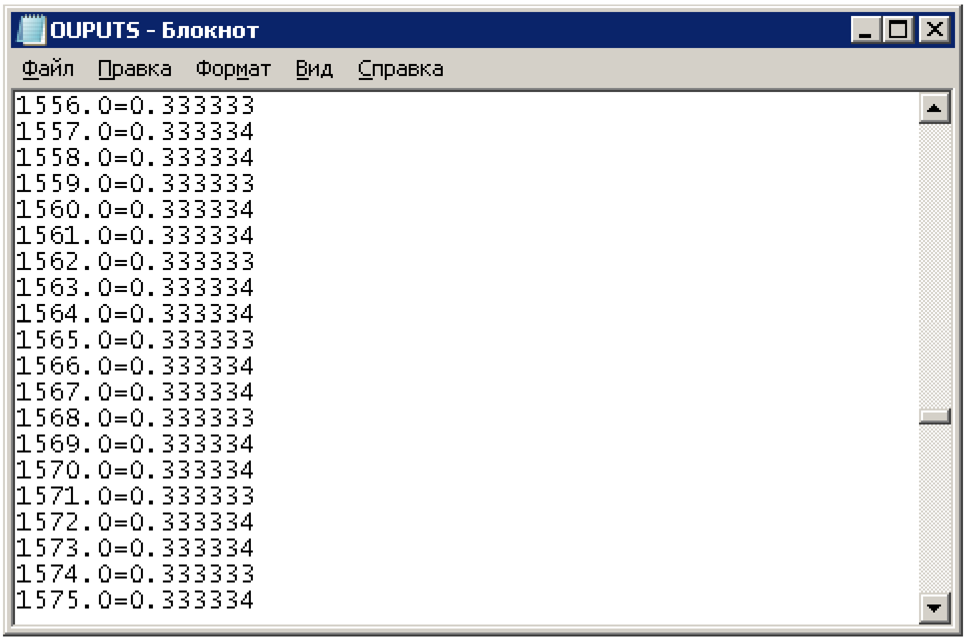


Значення $C_n^{(2,1)}$ для пвід 949 до 968



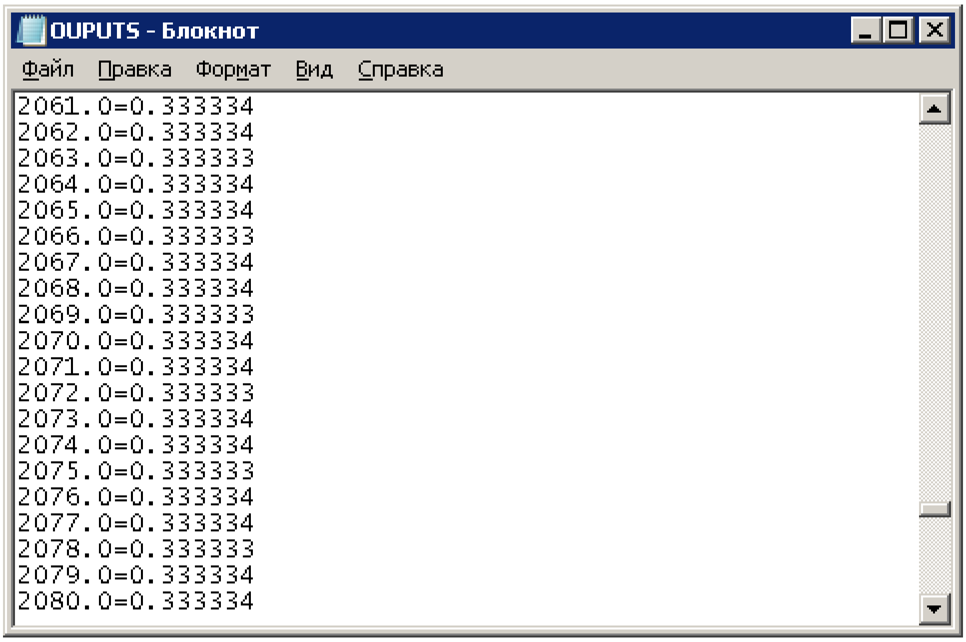

```
1081.0=0.333334
1082.0=0.333333
1083.0=0.333334
1084.0=0.333334
1085.0=0.333333
1086.0=0.333334
1087.0=0.333334
1088.0=0.333333
1089.0=0.333334
1090.0=0.333334
1091.0=0.333333
1092.0=0.333334
1093.0=0.333334
1094.0=0.333333
1095.0=0.333334
1096.0=0.333334
1097.0=0.333333
1098.0=0.333334
1099.0=0.333334
1100.0=0.333333
```

Значення $C_n^{(2,1)}$ *для* n*від 1081 до 1100*



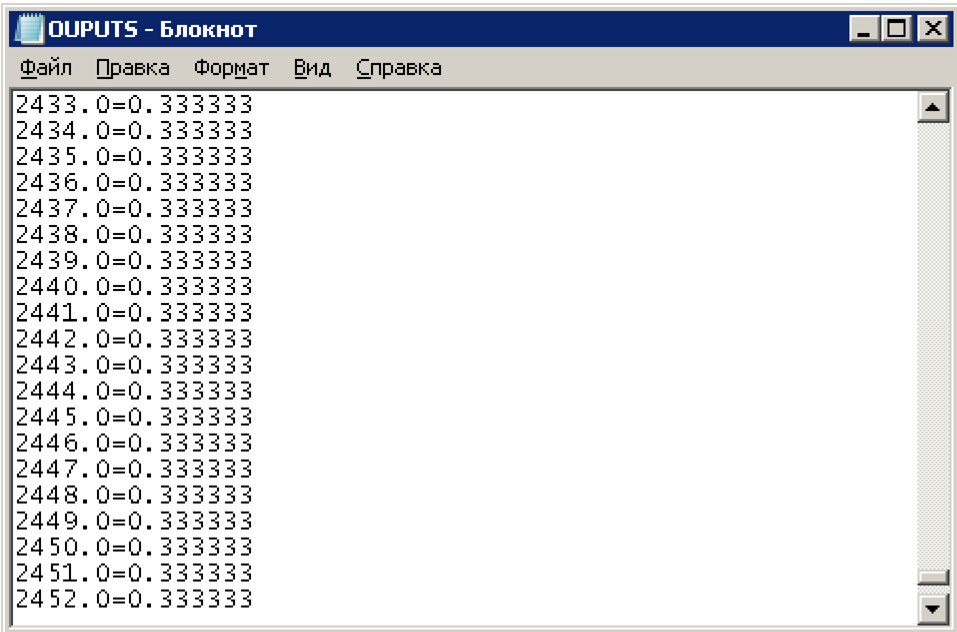

```
1556.0=0.333333
1557.0=0.333334
1558.0=0.333334
1559.0=0.333333
1560.0=0.333334
1561.0=0.333334
1562.0=0.333333
1563.0=0.333334
1564.0=0.333334
1565.0=0.333333
1566.0=0.333334
1567.0=0.333334
1568.0=0.333333
1569.0=0.333334
1570.0=0.333334
1571.0=0.333333
1572.0=0.333334
1573.0=0.333334
1574.0=0.333333
1575.0=0.333334
```

Значення $C_n^{(2,1)}$ *для* n*від 1556 до 1575*




```
2061.0=0.333334
2062.0=0.333334
2063.0=0.333333
2064.0=0.333334
2065.0=0.333334
2066.0=0.333333
2067.0=0.333334
2068.0=0.333334
2069.0=0.333333
2070.0=0.333334
2071.0=0.333334
2072.0=0.333333
2073.0=0.333334
2074.0=0.333334
2075.0=0.333333
2076.0=0.333334
2077.0=0.333334
2078.0=0.333333
2079.0=0.333334
2080.0=0.333334
```

Значення $C_n^{(2,1)}$ *для nвід 2061 до 2080*




```
2433.0=0.333333
2434.0=0.333333
2435.0=0.333333
2436.0=0.333333
2437.0=0.333333
2438.0=0.333333
2439.0=0.333333
2440.0=0.333333
2441.0=0.333333
2442.0=0.333333
2443.0=0.333333
2444.0=0.333333
2445.0=0.333333
2446.0=0.333333
2447.0=0.333333
2448.0=0.333333
2449.0=0.333333
2450.0=0.333333
2451.0=0.333333
2452.0=0.333333
```

Значення $C_n^{(2,1)}$ *для nвід 2433 до 2452*